

Modèles 2-D MA pour les champs non déterministes et la décomposition de textures de type Wold

Fernando MERCHAN, Flavius TURCU, Mohamed NAJIM

IMS- Département LAPS - UMR 5218 CNRS, Université de Bordeaux I/ ENSEIRB
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex

Email: {fernando.merchan, flavius.turcu, mohamed.najim}@laps.ims-bordeaux.fr

Résumé – Nous proposons une nouvelle méthode pour l'estimation de paramètres d'un modèle 2-D MA infini tronqué associé aux champs stationnaires non déterministes. Cette méthode est développée dans le cadre d'approches d'analyse et de synthèse fondées sur l'utilisation de modèles paramétriques. La méthode d'estimation de paramètres proposée est exploitée pour dériver un schéma de séparation de champs déterministe et non déterministe de textures de type Wold. La méthode de séparation est de type global, puisque l'on n'utilise pas de traitements locaux tels que la segmentation dans le domaine spectral.

Abstract – In this paper, we propose a new method to compute the parameters of finite approximations of 2-D MA infinite models associated with purely indeterministic stationary fields, by using spectral factorizations. This method is developed in the framework of model based approaches for texture analysis and synthesis. The proposed parameter estimation method is then exploited to derive a scheme to separate the indeterministic and the deterministic components of a texture in Wold decomposition based models. Unlike existing approaches, the resulting decomposition scheme does not require any support detection technique in the spectral domain.

1. Introduction

Dans le domaine de la modélisation des textures par des processus aléatoires, l'une des approches consiste à utiliser les décompositions de Wold bidimensionnelles [1,2]. Le résultat mathématique 2-D utilisé est une extension du théorème original 1-D de H. Wold [6] utilisé pour les séries temporelles. Dans cette approche en 2-D, la texture est représentée comme un champ régulier stationnaire qui se décompose en deux champs orthogonaux :

- ✓ Un champ complètement non déterministe caractérisé par une densité spectrale continue,
- ✓ un champ déterministe qui se décompose lui-même en deux composantes orthogonales : un champ dit harmonique, qui correspond aux composantes harmoniques 2-D (i.e. les pics dans le domaine fréquentiel) et un champ évanescent caractérisé par des lignes droites dans le domaine fréquentiel.

Dans [2], Francos et *al.* présentent un modèle générique pour chaque composante de Wold. Le modèle le plus général pour la composante complètement non déterministe est la représentation à moyenne ajustée infinie (MA) [1]. Cependant, sous certaines conditions¹, une représentation autorégressive (AR) est admissible et elle est suggérée dans [2].

La plupart des approches d'estimation de paramètres requièrent une séparation préalable de composantes de Wold. Ainsi, Francos [2] propose une procédure itérative pour la détection du support du champ déterministe dans le

periodogramme, qui consiste à localiser les pics d'amplitude. Pour ce faire, un seuil, initialisé à la valeur maximale du periodogramme, décroît graduellement afin que seuls les pics étroits soient détectés. Le champ non déterministe est obtenu par la soustraction du champ déterministe estimé à la texture originale. Cette approche a comme inconvénient la difficulté du choix d'un critère d'arrêt pour le seuil. De plus, il est difficilement applicable dans le cas où l'amplitude des coefficients de Fourier ne permet pas de distinguer la partie déterministe et la partie non déterministe.

Une méthode plus robuste pour la décomposition de Wold est présentée par Liu et Picard dans [7]. Leur algorithme exploite les relations intrinsèques fondamentales des harmoniques pour la détection de fréquences harmoniques. Pour la détection de champ évanescent notamment, ils utilisent la transformée de Hough. Cette méthode a pour inconvénient la recherche du support de différentes composantes déterministes de manière individuelle.

Dans cette communication deux aspects de l'analyse de texture de Wold sont abordés :

- ✓ la modélisation et l'estimation de paramètres du champ complètement non déterministe,
- ✓ la séparation des champs déterministe et non déterministe.

Dans un premier temps nous proposons d'utiliser une approximation finie d'une représentation MA 2-D infinie pour de champ non déterministe. L'estimation de paramètres MA est alors fondée sur les coefficients de Taylor de la fonction extérieure dont la valeur absolue au carré sur le bitore est égale (presque partout) à la densité de la mesure spectrale du champ non déterministe. Ce modèle

¹ Le champ complètement non déterministe a une représentation AR si sa densité spectrale est positive dans bicercle unité et analytique dans sa proximité.

diffère des modèles MA 2-D obtenus à l'aide de méthodes algébriques, comme celle proposée dans [8].

Ensuite, nous proposons un schéma de décomposition qui ne requiert pas des techniques de détection de support dans le domaine spectral. Ce schéma utilise les paramètres estimés par la méthode proposée.

Le document est organisée comme suit : la section 2 présente les bases théoriques de la méthode d'estimation de paramètres MA. Dans la section 3, nous présentons des aspects d'implantation de la méthode. Dans la section 4, nous dérivons un schéma de séparation des champs déterministe et non déterministe.

2. Fondement théorique

Rappelons pour commencer la représentations MA infinie des champs non déterministes ou aléatoires.

Considérons un champ stationnaire $\{y(m, n)\}_{(m, n) \in \mathbf{Z}^2}$ de variables aléatoires à moyenne nulle et variance finie et notons μ_y la mesure spectrale de $\{y(m, n)\}_{(m, n) \in \mathbf{Z}^2}$ sur le bitore $\mathbf{T}^2 := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}^2$.

Par l'extension de Helson-Lowdenslager [6] du théorème de décomposition de Wold, le champ $\{y(m, n)\}_{(m, n) \in \mathbf{Z}^2}$ se décompose dans une somme orthogonale unique :

$$y(m, n) = w(m, n) + v(m, n) \quad (1)$$

où $\{w(m, n)\}_{(m, n) \in \mathbf{Z}^2}$ est le champ non déterministe de mesure spectrale μ_w et $\{v(m, n)\}_{(m, n) \in \mathbf{Z}^2}$ est le champ déterministe de mesure spectrale μ_v . En outre, si $\{w(m, n)\}_{(m, n) \in \mathbf{Z}^2}$ est non nul alors μ_w est absolument continue et μ_v est singulière, de telle sorte que la mesure spectrale de $\{y(m, n)\}$ se décompose comme suit :

$$d\mu_y = \varphi dm_2 + \mu_v \quad (2)$$

où φ est la densité spectrale de μ_w par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée m_2 sur \mathbf{T}^2 .

Le champ non déterministe est mis en évidence à travers le champ dit d'innovations du champ $\{y(m, n)\}$, par rapport à un ordre total de groupe \leq sur \mathbf{Z}^2 . Considérons le champ $\{p(m, n)\}_{(m, n) \in \mathbf{Z}^2}$ obtenu par la projection de chaque échantillon $y(m, n)$ sur l'enveloppe linéaire fermée des échantillons $y(m', n')$ tels que $(m', n') < (m, n)$. Le champ d'innovation de $\{y(m, n)\}$ est alors $i(m, n) = y(m, n) - p(m, n)$. Ainsi $\{i(m, n)\}$ est un processus blanc dont la variance σ^2 est donnée par la formule de Szego :

$$\sigma^2 = \|i(0, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \exp\left(\int_{\mathbf{T}^2} \log(\varphi) dm_2\right). \quad (3)$$

Le champ $\{w(m, n)\}$ est obtenu alors par la projection du champ $\{y(m, n)\}$ sur l'enveloppe linéaire fermée des échantillons de champ d'innovation $\{i(m, n)\}$. Dès lors, le champ $\{w(m, n)\}$ admet une représentation 2-D MA infinie de la forme :

$$w(m, n) = \sum_{(0, 0) \leq (k, l)} a(k, l) i(m - k, n - l), \quad (4)$$

Ainsi la fonction de transfert f associée au modèle :

$$f(z_1, z_2) = \sum_{(k, l) \geq (0, 0)} a(k, l) z_1^k z_2^l \quad (5)$$

appartient à $L^2(\mathbf{T}^2)$ et vérifie :

$$\sigma^2 |f(z_1, z_2)|^2 = \varphi(z_1, z_2) \text{ p.p. } \mathbf{T}^2 \quad (6)$$

L'équation (5) n'a pas une solution unique en générale, mais nous sommes intéressés seulement par une solution particulière.

Pour certains besoins pratiques (voir aussi [3,4]) nous pouvons supposer que la représentation (4) a tous les coefficients dans le premier quadrant de \mathbf{Z}^2 , de telle sorte que la fonction f soit analytique et ainsi appartenant à l'espace de Hardy $H^2(\mathbf{D}^2)$. Avec cette condition supplémentaire, toutes solutions de l'équation (6) ont une factorisation de la forme [5] :

$$f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) F(z_1, z_2) \quad (7)$$

où u est une fonction intérieure (i.e. u a un module 1 p.p. sur \mathbf{T}^2) et F est la fonction extérieure tel que $|F|^2 = \varphi / \sigma^2$ p.p. sur \mathbf{T}^2 .

Une solution spéciale pour l'équation (6) est ainsi la fonction extérieure F elle-même (c'est-à-dire $u \equiv 1$ dans (7)). Cette solution a deux avantages. D'abord, F est bornée et elle n'a pas de zéros dans le bi-disque unité donc le filtre MA correspondant (4) et son inverse sont stables². Le deuxième avantage est que F est déterminée uniquement par la densité φ , par la formule (voir [5]) :

$$F(z_1, z_2) = \exp\left(\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it_1} + z_1}{e^{it_1} - z_1} \frac{e^{it_2} + z_2}{e^{it_2} - z_2} \log \varphi^{1/2}(e^{it_1}, e^{it_2}) dt_1 dt_2\right) \quad (8)$$

Les paramètres du modèle MA (4), c'est-à-dire les coefficients de Taylor de F , sont obtenus via la formule de Cauchy (11).

3. Méthode proposée

La méthode proposée exploite le calcul numérique du facteur extérieur F décrit dans la section précédente de la manière suivante : considérons une image texturée comme une réalisation d'un champ stationnaire aléatoire. Sous

² Ce critère de stabilité est exprimé en accord avec la convention d'écriture utilisé dans l'équation (5).

l'hypothèse d'ergodicité, la densité de la mesure spectrale du champ aléatoire peut être assimilée à la densité spectrale de puissance (DSP) de la texture. A partir de la DSP nous pouvons calculer la fonction extérieure F associée à cette densité et ainsi obtenir une approximation tronquée du modèle MA 2-D comme suit :

1. Estimation de la DSP de la texture : $\hat{\phi}_{ww}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$,
2. Estimation de la fonction extérieure :

$$F(r_1 e^{j\theta_1}, r_2 e^{j\theta_2}) = \exp \int_{\theta_1=0}^{2\pi} \int_{\theta_2=0}^{2\pi} \frac{1}{2(2\pi)^2} \left(\frac{e^{j\omega_1} + r_1 e^{j\theta_1}}{e^{j\omega_1} - r_1 e^{j\theta_1}} \right) \left(\frac{e^{j\omega_2} + r_2 e^{j\theta_2}}{e^{j\omega_2} - r_2 e^{j\theta_2}} \right) \log(\hat{\phi}_{ww}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})) d\omega_1 d\omega_2, \quad (9)$$

3. Estimation des coefficients de Taylor de la fonction extérieure :

$$F(z_1, z_2) = \sum_{m,n} \hat{a}_{m,n} z_1^m z_2^n, \quad (z_i = r_i e^{j\theta_i}, 0 < r_i < 1) \quad (10)$$

En utilisant la formule de Cauchy :

$$a_{m,n} = \frac{1}{(2\pi)^2 r_1^m r_2^n} \int_{\theta_1=0}^{2\pi} \int_{\theta_2=0}^{2\pi} \hat{F}(r_1 e^{j\theta_1}, r_2 e^{j\theta_2}) e^{jm\theta_1} e^{jn\theta_2} d\theta_1 d\theta_2 \quad (11)$$

En pratique, la DSP est estimé par la méthode du periodogramme :

$$\hat{P}_y(k, l) = \frac{1}{N^2} |Y(k, l)|^2 \quad (12)$$

où $Y(k, l)$ est la transformée de Fourier discrète 2-D de $N \times N$ points de $y(k, l)$.

L'intégrale discrète du facteur extérieur peut être calculée par exemple par la méthode des rectangles, donc :

$$F_r(k, l) = \exp \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2N^2} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}m} + re^{j\frac{2\pi}{N}k}}{e^{j\frac{2\pi}{N}m} - re^{j\frac{2\pi}{N}k}} \right) \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n} + re^{j\frac{2\pi}{N}l}}{e^{j\frac{2\pi}{N}n} - re^{j\frac{2\pi}{N}l}} \right) \log(\hat{P}_y(k, l)) \quad (13)$$

Similairement, les coefficients de Taylor deviennent :

$$a_{m,n} = \frac{1}{N^2 r_1^{n+m}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F_r(k, l) e^{jmk(\frac{2\pi}{N})} e^{jnl(\frac{2\pi}{N})} \quad (14)$$

pour $0 < r < 1$.

Dans la figure 1 un exemple d'analyse et synthèse est présenté. La texture originale (a) est synthétisée avec un filtre MA 2-D 6×4 excité par un champ de bruit blanc. La texture de synthèse (b) est générée avec un modèle MA 2-D 6×4 obtenu par la procédure décrite dans cette section dont l'excitation est un bruit blanc arbitraire. Les DSP³

correspondantes aux coefficients originaux (a) et aux coefficients estimés (b) sont également présentés. Nous pouvons observer que la DSP estimée conserve la forme de la DSP originale.

4. Approche de Décomposition

Dans la suite nous dérivons une approche de décomposition pour la séparation des composantes déterministe et non déterministe d'une texture. Rappelons l'équation (1) :

$$y(m, n) = w(m, n) + v(m, n) \\ = \sum_{(0,0) \leq (k,l)} a(k, l) u(m-k, n-l) + v(m, n) \quad (15)$$

où le bruit blanc u est de variance égale à celle de l'innovation $\{i(m, n)\}$ et $\{a(k, l)\}$ les paramètres MA du champ non déterministe $\{w(m, n)\}$. En prenant la transformée en z de l'équation (15) nous obtenons :

$$Y(z_1, z_2) = W(z_1, z_2) + V(z_1, z_2) \\ = F(z_1, z_2) U(z_1, z_2) + V(z_1, z_2) \quad (16)$$

où $F(z_1, z_2)$ est la fonction extérieure définie comme suit :

$$F(z_1, z_2) = \sum_{m,n} a(m, n) z_1^m z_2^n \quad (17)$$

En filtrant l'image originale avec F^{-1} , nous obtenons le champ décrit par la transformée en z :

$$Y_{FIL}(z_1, z_2) = F^{-1}(z_1, z_2) Y(z_1, z_2) \\ = U(z_1, z_2) + F^{-1}(z_1, z_2) V(z_1, z_2) \quad (18)$$

c-à-d, un champ déterministe plus le bruit blanc u . Ainsi, pour calculer le champ déterministe $\{v(m, n)\}$ de la texture originale, nous devons filtrer le bruit blanc $\{u(m, n)\}$ de (18), et restaurer $\{v(m, n)\}$ en filtrant le résultat avec F .

Nous résumons la procédure de séparation dans la figure 2. La figure 3 présente un exemple qui illustre la décomposition d'une texture dans ses composantes déterministe et non déterministe. Nous observons l'image originale (a), le champ déterministe (b) obtenu et le champ non déterministe obtenu par la différence de (b) et (a).

5. Conclusions

Dans cette communication nous proposons l'utilisation du facteur extérieur de la densité spectrale de puissance d'une texture pour calculer un modèle MA 2-D de la partie non déterministe de la texture. Cette méthode est utilisée pour dériver un schéma de décomposition de Wold pour la séparation des parties déterministe et non déterministe de la texture. Le schéma de décomposition est de type global dans le sens où l'on n'utilise pas des traitements locaux tels que la segmentation dans le domaine spectral.

³ Les DSP présentés sont de la forme:

$$\varphi(f_1, f_2) = \sigma^2 \left| \sum_m \sum_n a_{m,n} e^{-jn2\pi f_1} e^{-jm2\pi f_2} \right|^2$$

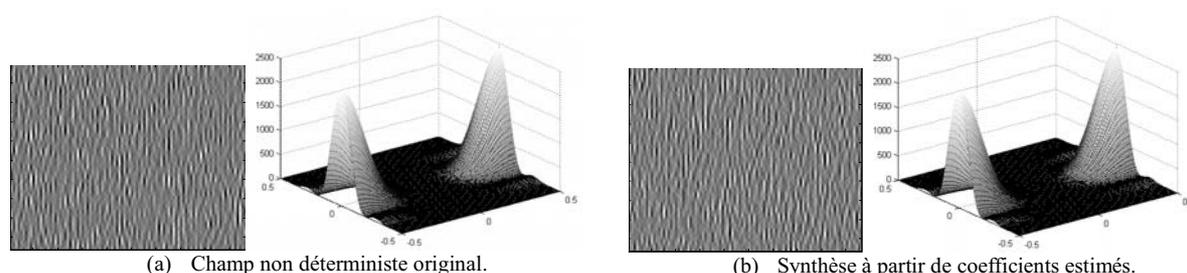


Figure 1. Exemple d'analyse et synthèse de texture. Représentations spatiales et DSP correspondantes aux coefficients originaux (a) et estimés (b).

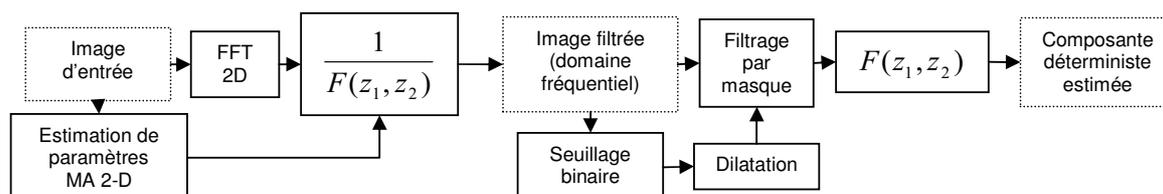


Figure 2. Schéma de décomposition proposé

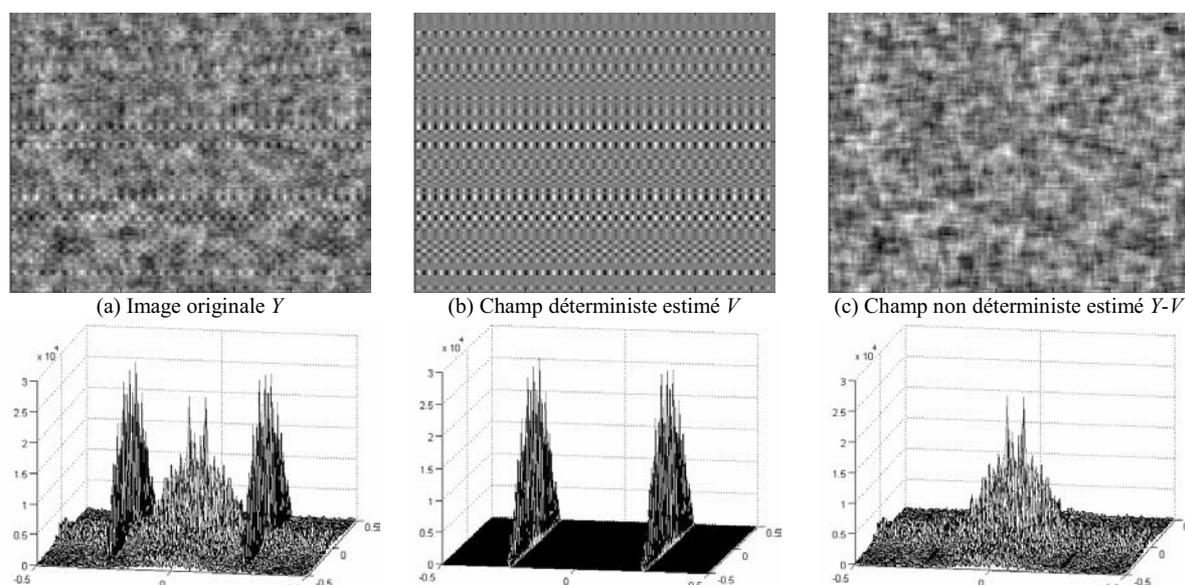


Figure 3. Exemple de décomposition de Wold. Représentations spatiales (première rang) et fréquentielle en échelle linéaire (deuxième rang) de : (a) l'image originale, (b) le champ déterministe estimé, (c) le champ non déterministe estimé.

Références

- [1] H. Helson D. Lowdenslager, "Prediction theory and Fourier series in several variables, I,II," *Acta Math.*, vol.99, pp.165-202, 1958, . vol.106, pp.175-213, 1962.
- [2] J. M. Francos, A. Z. Meiri and B. Porat, "A Unified Texture Model Based on a 2-D Wold Like Decomposition," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, pp. 2665-2678, August 1993.
- [3] L. Gavarecki, V. Mandrekar, P. Richard, "Proper Moving Average Representations and Outer Functions in Two Variables" *Georgian Math. J.*, vol. 8, No. 2, pp.275-281, 2001.
- [4] H. Korezlioglu, and P. Loubaton, "Spectral factorization of wide sense stationary processes on Z^2 ," *J. of Multivariate Anal.*, vol. 19, no. 1, pp. 24-27, 1986.
- [5] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, New York, 1969.
- [6] H. Wold, "A study in the analysis of stationary time series", Almquist & Wiksell, Stockholm, 1938
- [7] F. Liu and R. W. Picard, "A Spectral 2-D Wold Decomposition Algorithm for Homogeneous Random Fields," *ICASSP'99*, Phoenix, Arizona, March 1999, vol. 4, pp. 3501-3504.
- [8] J. M. Francos and B. Friedlander, "Parameter Estimation of Two-Dimensional Moving Average Random Fields," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, pp.2157-2165, August 1998.