



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

SEDE VICTOR LEVI SASSO

FOLLETO DE MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

INCLUYE PRUEBAS SUMATIVAS Y PRESENTACIONES DEL CONTENIDO

DR. CARLOS A. ROVETTO

JULIO 2020



Universidad Tecnológica de Panamá (UTP)

Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Para ver esta licencia:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>

Contenido

| | |
|---|----|
| Índice de figuras..... | 5 |
| Índice de Tablas..... | 7 |
| Introducción..... | 8 |
| Capítulo I: Introducción a la Simulación de Sistemas..... | 9 |
| Características de los sistemas | 9 |
| Clasificación de sistemas | 10 |
| Elementos de un sistema | 11 |
| Definición de modelo | 11 |
| Definición de Simulación | 12 |
| Naturaleza experimental..... | 12 |
| Ejemplos de estudios de sistemas..... | 12 |
| Ventajas y desventajas de la simulación | 13 |
| Factores a considerar en el desarrollo del modelo de simulación | 14 |
| Pasos para realizar un proyecto de simulación | 14 |
| Clasificación de los lenguajes..... | 16 |
| Tipos de Simulación | 17 |
| Capítulo II: Introducción al uso de probabilidades..... | 20 |
| Conceptos básicos | 20 |
| Teoría de probabilidad..... | 22 |
| Axiomas de la probabilidad..... | 22 |
| Regla general de la adición | 23 |
| Probabilidad condicional..... | 24 |
| Teorema de la multiplicación | 24 |
| Independencia de Sucesos | 25 |

| | |
|---|----|
| Teorema de Bayes | 26 |
| Funciones de probabilidad..... | 28 |
| Distribuciones de Probabilidad | 29 |
| Variable discreta..... | 29 |
| Esperanza matemática | 31 |
| Variable continua..... | 31 |
| Capítulo III: Generación de números aleatorios | 33 |
| Propiedades de los números aleatorios..... | 33 |
| Técnicas para la generación de números aleatorios | 35 |
| Tests para números aleatorios | 39 |
| Capítulo IV: Teoría de Colas | 40 |
| Descripción de un sistema de colas | 40 |
| Costos de un sistema de colas..... | 41 |
| Llegadas | 41 |
| Distribución exponencial..... | 42 |
| Distribución de Poisson | 42 |
| La cola | 43 |
| El servicio | 44 |
| Desempeño del sistema de colas..... | 44 |
| Factor de utilización del sistema..... | 46 |
| Modelos de Colas..... | 46 |
| Método de Montecarlo | 48 |
| Capítulo V: Simulación con el software Arena | 52 |
| Módulos Básicos..... | 54 |
| Primeros Pasos con Arena..... | 58 |

| | |
|---------------------------------|----|
| Proceso con Condicionales | 61 |
| Bibliografía | 65 |
| Anexos | 68 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1. Ciclo de la simulación de sistemas. | 16 |
| Figura 2. Simulación de un estanque de agua (continua). | 18 |
| Figura 3. Representación de un sistema de colas. | 18 |
| Figura 4. Esperanza matemática en el lanzamiento de dos dados. | 31 |
| Figura 5. Probabilidad de una variable continua. | 32 |
| Figura 6. Generación de números aleatorios en Excel..... | 35 |
| Figura 7. Modelo de cola básico. | 41 |
| Figura 8. Comportamiento de la distribución exponencial..... | 42 |
| Figura 9. Comportamiento de la distribución de Poisson. | 43 |
| Figura 10. Fórmulas generales en la teoría de colas. | 45 |
| Figura 11. Medidas de desempeño del ejemplo..... | 46 |
| Figura 12. Fórmula del factor de utilización del sistema con uno y varios servidores. ... | 46 |
| Figura 13. Medidas del desempeño del modelo M/M/1..... | 47 |
| Figura 14. Medidas del desempeño del modelo M/G/1. | 47 |
| Figura 15. Medidas del desempeño en la cola M/D/1. | 48 |
| Figura 16. Medidas del desempeño en la cola M/Ek/1..... | 48 |
| Figura 17. Ejemplo del teorema de Montecarlo..... | 50 |
| Figura 18. Interfaz del software Arena. | 52 |
| Figura 19. Módulo Create..... | 54 |
| Figura 20. Módulo Dispose. | 55 |
| Figura 21. Módulo Process. | 55 |
| Figura 22. Módulo Decide. | 56 |
| Figura 23. Módulo Batch. | 57 |
| Figura 24. Módulo Separate..... | 57 |
| Figura 25. Módulo Assign..... | 58 |
| Figura 26. Módulo Record..... | 58 |
| Figura 27. Ejemplo #1 - Módulo Create..... | 59 |
| Figura 28. Ejemplo #1 - Módulo Process. | 59 |
| Figura 29. Ejemplo #1 - Módulo Dispose. | 59 |

| | |
|--|----|
| Figura 30. Diagrama del Ejemplo #1..... | 60 |
| Figura 31. Configuración de parámetros de corrida del Ejemplo #1. | 60 |
| Figura 32. Reportes generados para el Ejemplo #1..... | 61 |
| Figura 33. Módulo Create del Ejemplo #2..... | 62 |
| Figura 34. Módulo Process del Ejemplo #2..... | 62 |
| Figura 35. Módulo Decide del Ejemplo 32..... | 63 |
| Figura 36. Modelo completo del Ejemplo #2. | 63 |

Índice de Tablas

| | |
|---|----|
| Tabla 1. Ejemplo de lista de eventos..... | 19 |
| Tabla 2. Distribución de frecuencia para el lanzamiento de dos dados..... | 30 |
| Tabla 3. Distribución de probabilidad del lanzamiento de dos dados..... | 31 |

Introducción

El modelado de simulación por computadora es una disciplina que busca crear una simulación de un modelo abstracto de un determinado sistema. El modelado de simulación por computadora es ampliamente utilizado debido a que puede ayudar en el diseño, creación, análisis y evaluación de sistemas complejos. La lista de ciencias que hacen un uso extensivo de la simulación por computadora abarca áreas del conocimiento que no solo son de ingeniería como ciencia del clima, biología evolutiva, epidemiología y muchas otras.

Podemos resumir que el modelo es básicamente una representación del sistema real y se sabe que el proceso de simulación representa el funcionamiento del sistema en el tiempo. Los diseñadores utilizan modelos de simulación por computadora para comprender y evaluar posibles escenarios de casos "qué pasaría si", con la finalidad de predecir un comportamiento dentro los parámetros del sistema. Por este motivo las simulaciones ayudan en gran medida a determinar los comportamientos cuando se alteran los componentes individuales de un sistema y así establecer controles que garanticen el óptimo comportamiento del sistema. La herramienta matemática o estadística es la base de las simulaciones y se puede utilizar para diferentes simulaciones que conducen a diversos tipos de análisis científico.

Al inicio de esta asignatura se realizará una Introducción a la Simulación de Sistemas y posteriormente se continuará con una Introducción al uso de Probabilidades. Una vez se tienen estos conceptos asimilados se aborda la Generación de números aleatorios y la Teoría de Colas. Finalmente se utilizará un software para implementar lo ofrecido en la teoría de la asignatura.

Capítulo I: Introducción a la Simulación de Sistemas

Para definir el concepto de simulación de sistemas de forma correcta, se debe primero dejar claro el concepto de sistemas. Sistemas puede definirse como *“un conjunto de cosas que ordenadamente relacionadas entre sí contribuyen a determinado objeto”* (L. Teoría).

Partiendo de esta premisa, encontramos en un sistema a varios elementos contribuyendo para una causa en común.

Características de los sistemas

Entre las características de los sistemas, se pueden resaltar:

- **Elementos:** Los elementos hacen referencias a todas las partes u objetos que constituyen un sistema. Un sistema no debe ser tratado como un objeto individual sino que debe considerarse como un grupo de componentes que buscan realizar una tarea u objetivo en común. Por ejemplo, si el objeto de estudio es un avión, el avión no se trata como un objeto único, sino como el resultado de diversas partes organizadas y relacionadas que garantizan su correcto funcionamiento (Arnold & Osorio).
- **Interacción:** Existe toda una distribución de relaciones entre los elementos de un sistema. Ningún objeto de un sistema se encuentra aislado. En algún momento debe interactuar con algún otro componente del sistema ya sea para realizar una tarea en conjunto, o quizás la acción del otro componente es dependiente del funcionamiento del primero objeto (Bertoglio).
- **Estructura:** Los sistemas poseen una organización interna. Los elementos se rigen por una serie de jerarquías y relaciones que le dan estabilidad al sistema y que garantiza el cumplimiento de los objetivos comunes. De ahí se dice que las partes del sistema tienen una propiedad holística (Bertoglio).
- **Entorno:** Un sistema nunca puede estar aislado. El forma parte de otro sistema mayor magnitud o se relaciona directa e indirectamente con otros sistemas. Por ejemplo considere como sistema una gasolinera, con sus máquinas

despachadoras, almacén y empleados. Las máquinas se clasifican de acuerdo al tipo de combustible que proveen, en el almacén existen diversos repuestos, los empleados trabajan por turnos; sin embargo si el proveedor de combustible se atrasa en la entrega de los combustibles, se paraliza la operación principal de la gasolinera.

- **Entropía:** Los sistemas tienden a desorganizarse con el paso del tiempo. En cualquier transformación que se produzca, la entropía del mismo aumenta o permanece constante de manera que alcance una configuración de entropía máxima, debido a los cambios que está experimentando, consiguiendo así un equilibrio.

Clasificación de sistemas

De acuerdo a su naturaleza, un sistema puede ser (Tarifa, 1988):

- **Determinístico:** Si el sistema no contiene ningún elemento aleatorio es un sistema determinístico. En este tipo de sistema, las variables de salidas e internas quedan perfectamente determinadas al especificar las variables de entrada, los parámetros y las variables de estado. Es decir, las relaciones funcionales entre las variables del sistema están perfectamente definidas. El calentador eléctrico estudiado es un sistema determinístico.
- **Estocástico:** En este caso algún elemento del sistema tiene una conducta aleatoria. Entonces, para entradas conocidas no es posible asegurar los valores de salida. Un ejemplo de sistema estocástico es una máquina tragamonedas en la cual una misma acción (tirar la palanca) genera un resultado incierto (ganar o perder). Cuando un sistema determinístico es alimentado con entradas estocásticas, la respuesta del sistema es también estocástica. Por ejemplo, la temperatura ambiente es una variable estocástica que afecta la respuesta del calentador eléctrico. En el mundo real, los sistemas siempre tienen elementos estocásticos ya sea por su propia naturaleza o porque son fenómenos no comprendidos actualmente; por ejemplo, a un cavernícola le podía parecer que las eclipses eran fenómenos aleatorios, hoy ellas son predichas. Sin embargo, se

puede considerar a un sistema real con un sistema determinístico si su incertidumbre es menor que un valor aceptado.

- **Continuo:** Se tiene un sistema continuo cuando las relaciones funcionales entre las variables del sistema sólo permiten que el estado evolucione en el tiempo en forma continua (basta que una variable evolucione continuamente). Matemáticamente, el estado cambia en infinitos puntos de tiempo. El recipiente del calentador es un subsistema continuo porque tanto M como T evolucionan en forma continua durante la operación del sistema.
- **Discreto:** Se tiene un sistema discreto cuando las relaciones funcionales del sistema sólo permiten que el estado varíe en un conjunto finito (contable) de puntos temporales. Las causas instantáneas de los cambios de estados se denominan eventos.

Elementos de un sistema

Todo sistema está compuesto por elementos bien determinados:

- **Entidad:** Una parte u objeto de interés en un sistema.
- **Atributo:** Una propiedad de una entidad.
- **Actividad:** Proceso que requiere de un intervalo de tiempo finito para su realización.
- **Estado:** Descripción de todos los atributos de todas las entidades y todas las actividades de un sistema en un instante de tiempo dado.
- **Evento:** Fenómeno que ocurre en un instante de tiempo y que cambia el estado del sistema.

Definición de modelo

Modelo se define como la abstracción de un sistema. Es decir, dentro de un modelo, vamos plasmando el comportamiento de un sistema de una manera netamente matemática, y tomando en cuenta todos los actores y variables de dicho sistema.

Algunas ideas a toma en consideración a la hora de trabajar con modelos:

- Los modelos son una abstracción de la realidad. Esta representación a entender cómo funciona el objeto de estudio.

- Los modelos son una construcción intelectual y descriptiva de un objeto (entidad) en la cual recae un interés de parte de un observador.

Existen variados tipos de modelo, tales como:

- **Físico:** (Maquetas, prototipos, plantas ...)
- **Matemático:** (Modelos de colas analíticas, programas lineales, simulación)

Definición de Simulación

Aclarados estos conceptos podemos pasar a definir simulación. Según estudiosos del tema, como Robert E Shannon, simulación se puede definir como: “el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales se puede operar el sistema” (Coss Bu).

Naturaleza experimental

El principal propósito de la simulación es recrear diversos estados de un sistema o proceso que en la práctica serían muy difíciles de implementar, o que en casos de poderse implementar, podrían comprometer las operaciones generales del sistema. Por ejemplo, una fábrica que desea ahorrar costos suprimiendo algunas máquinas, le resultaría muy útil simular la eficiencia del sistema con menos equipos sin tener que suprimirlo directamente, puesto que esto podría tornar efectos inesperados.

Partiendo de este escenario, la simulación puede utilizarse en diversos ámbitos profesionales como por ejemplo: finanzas, sistemas computacionales, sistemas logísticos, aerolíneas, astronomía, climatología, etc.

Ejemplos de estudios de sistemas

- **Simulación de vuelos:** Los pilotos de las aerolíneas comerciales, así como los pilotos militares utilizan diferentes paquetes de software que los ayudan a ganar experiencia con los equipos antes de realizar vuelos reales.
- **Industria petrolera:** Empresas como e-Tech Simulation ofrecen equipos de entrenamiento basados en escenarios para la industria de ingeniería de petróleos, con el objetivo de mejorar la capacidad de los trabajadores para identificar y

mitigar riesgos de manera segura y efectiva, ofreciendo diferentes niveles de entrenamiento para operadores de campo, como también al personal con experiencia en gerencia y operaciones.

- **Industria financiera:** Se utiliza la simulación para las proyecciones referentes a estimaciones, costos, tendencias para una identificación de escenarios d riesgos, rentabilidad de mercado que ayude a los economistas a tomar decisiones acertadas.

Ventajas y desventajas de la simulación

Ventajas:

- Permite ahorrar costos al no tener que adquirir equipos o softwares que realicen la actividad que se desea simular.
- Evita tener que interrumpir o alterar la usabilidad del sistema con la implementación de los cambios
- Pueden establecerse condiciones tanto de éxito como de fracaso en el análisis del sistema, que serían totalmente inviables representar en la realidad.
- La simulación puede utilizarse como medio de capacitación para el personal de las empresas.

Desventajas:

- El desarrollo de un modelo puede ser costoso, laborioso y lento.
- Existe la posibilidad de cometer errores. No se debe olvidar que la experimentación se lleva a cabo con un modelo y no con el sistema real; entonces, si el modelo está mal o se cometen errores en su manejo, los resultados también serán incorrectos.
- No se puede conocer el grado de imprecisión de los resultados. Por lo general el modelo se utiliza para experimentar situaciones nunca planteadas en el sistema real, por lo tanto no existe información previa para estimar el grado de correspondencia entre la respuesta del modelo y la del sistema real.

Factores a considerar en el desarrollo del modelo de simulación

Es preciso aclarar, que para un correcto análisis de los resultados de la simulación, se requiere una base fuerte en estadística y probabilidad, por lo que en los siguientes capítulos estaremos presentado algunos temas que nos ayuden a profundizar en estos análisis.

Mientras tanto, presentaremos algunos aspectos importantes para un correcto desarrollo de un modelo (Coss Bu):

- **Generación de variables aleatorias no-uniformes:** esto puede obtenerse si se cuenta con un generador de números uniformes y una función que transforme estos números en valores de distribución de probabilidad deseada.
- **Lenguaje de programación:** de acuerdo al tipo de análisis y alcance del proyecto de simulación, podemos decidir que lenguaje o paquete de simulación debemos utilizar.
- **Condiciones iniciales:** deben determinarse las condiciones iniciales correctas de un sistema en estado estable.
- **Tamaño de la muestra:** la selección de un tamaño de muestra apropiado que asegure un nivel deseado de precisión y a la vez minimice el costo de operación del modelo.

Pasos para realizar un proyecto de simulación

- **Definir un objetivo alcanzable:** Recordemos que la simulación sirve para proponer soluciones a una problemática específica.
- **Prepare una mezcla completa de las habilidades en el equipo:** La simulación es un proceso que requiere trabajo en equipo para aumentar el rendimiento y disminuir los tiempos. Por eso, debemos incluir en el equipo de trabajo, integrantes que conozcan el proceso a estudiar, que manejen los conceptos estadísticos y matemáticos para la formulación de modelos y análisis de resultados y personal que maneje el paquete de software seleccionado.
- **Involucrar al usuario final:** Como en todo buen proyecto de tecnología, el usuario final debe estar involucrado en el desarrollo del proyecto para que

constate los avances y detecte cualquier falla antes de que el proyecto esté muy avanzado. Además la participación del usuario final facilita cualquier incomprensión que el equipo de trabajo tenga sobre el funcionamiento del sistema que se está estudiando.

- **Elegir las herramientas de simulación adecuados:** Este es un punto fundamental, ya que existen muchas herramientas de simulación, cada una con una aplicación específica.
- **Modelar el nivel apropiado de detalles:** Tanto la falla como el exceso de detalles son contraproducentes cuando se realizan estudios de simulación. Obviar detalles puede causar una simplificación grande del sistema que hará que los resultados no reflejen la realidad del sistema. Por el contrario, el exceso de detalles puede hacer que el modelo se haga demasiado complicado y no se atiende en profundidad las generalidades más importantes del sistema. Así que el trabajo de los detalles dependerá mucho de la capacidad de análisis del grupo de trabajo y también de la participación del usuario final.
- **Obtener los datos de entrada necesarios:** Si bien es cierto que en simulación se utiliza mucho la aleatoriedad en los procesos, también es importante que los datos de entrada al sistema deben estar sustentados en observaciones y mediciones reales.
- **Proporcionar la documentación adecuada:** Al hablar de documentación, no solo nos referimos a la herramienta de software sino también a todos los pasos que se realizaron en el estudio, anotando cada incidencia para facilitar la comprensión del estudio y servir de guía a futuros proyectos.
- **Desarrollar un plan para la verificación de los modelos adecuados.**
- **Desarrollar un plan para la validación del modelo.**
- **Desarrollar un plan para el análisis de la producción estadística.**

En la Figura #1, se muestra el ciclo de la simulación:

- Largo ciclo de desarrollo de cada modelo.
- Fase de verificación difícil.

Ejemplos: C, C++, Visual Basic, Java

Softwares de Simulación General:

Ventajas:

- Características estandarizadas a menudo necesarios en la modelización
- Ciclo de desarrollo más corto para cada modelo
- Gran asistencia en la verificación de los modelos
- Código de lectura fácil

Desventajas:

- Mayor costo del software (por adelantado)
- Entrenamiento adicional requerido
- Portabilidad limitada

Ejemplo: GPSS, SIMSCRIPT II.5, ModSim III, SIMULA

Tipos de Simulación

- **Continua:** En que el estado del modelo cambia constantemente en el tiempo. Ejemplo: sistemas físicos, dinámica de poblaciones, modelos económicos. En la Figura #2, mostramos un ejemplo de simulación de un sistema Continuo:

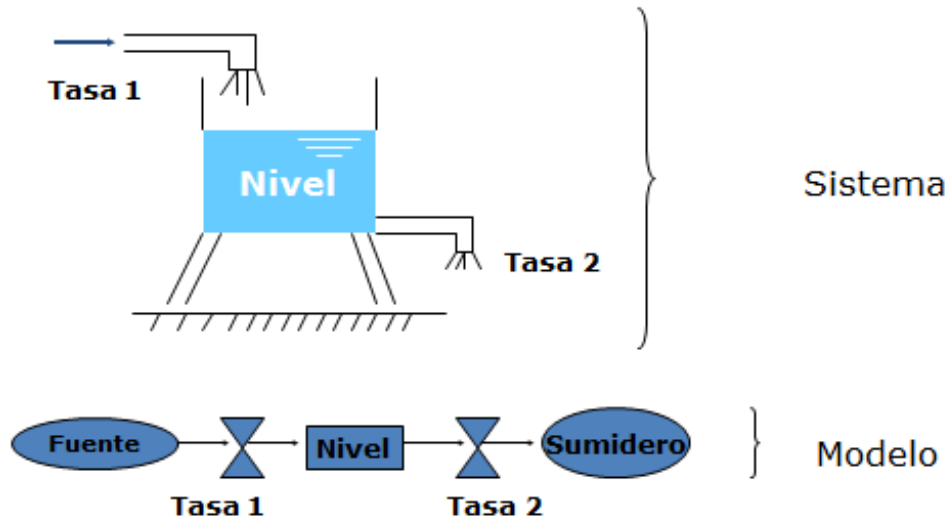


Figura 2. Simulación de un estanque de agua (continua).

- **Discreta:** En que los cambios de estado en el modelo ocurren cada cierto intervalo de tiempo: Ejemplos: cola de espera, ordenamiento de tareas.

Existen dos enfoques de simulación discreta:

- **Simulación orientada al proceso:** Consiste en desarrollar un Diagrama de Bloques, en donde cada bloque representa una actividad relacionada con el “Cliente”, a medida que éste transita por el sistema, como podemos observar en la Figura #3.

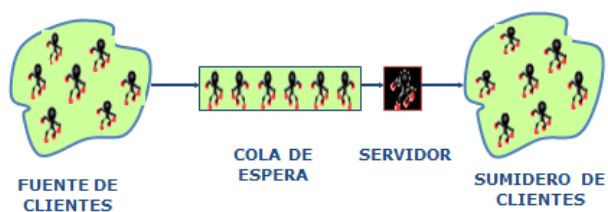


Figura 3. Representación de un sistema de colas.

- **Simulación orientada al evento:** Se centra en la programación de eventos que cambian el estado del sistema a simular, creando una “Lista de Eventos” (como podemos observar en la Tabla #1).

| Tipo de evento | Cliente | Tiempo de activación |
|---------------------|---------|----------------------|
| Llegada | 1 | 10.0 |
| Inicio de servicio | 1 | 10.0 |
| Llegada | 2 | 15.0 |
| Llegada | 3 | 19.0 |
| Término de servicio | 1 | 22.0 |
| Inicio de servicio | 2 | 22.0 |

Tabla 1. Ejemplo de lista de eventos.

Capítulo II: Introducción al uso de probabilidades

La probabilidad es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. (U. Facultad de Ciencias)

Apegándonos a esta definición, podemos encontrar el papel fundamental de la probabilidad dentro de un proyecto de simulación, ya que con la simulación pretendemos conocer diversos escenarios y la probabilidad de su ocurrencia dentro de un escenario real.

Por ello, antes de comenzar a trabajar con algunos procedimientos estadísticos, brindaremos definiciones acerca de algunos conceptos básicos de estadísticas.

Conceptos básicos

- **Experimento:** Un experimento, en estadística, es cualquier proceso que proporciona datos, numéricos o no numéricos (Pascal & Andrei).

Puede ser de dos tipos:

- Los experimentos (o fenómenos) aleatorios son aquellos en los que NO se puede predecir el resultado.
- Si se puede predecir el resultado, es un experimento determinista.

Ejemplos:

- Lanzar una moneda es un experimento aleatorio ya que no es posible predecir el resultado de si sale cara o sello.
 - El sorteo de la lotería es un experimento aleatorio ya que no se sabe que balota será extraída del ánfora.
 - Calentar el agua es un experimento determinista ya que sabemos que al llegar al punto de ebullición, el agua hervirá.
- **Espacio Muestral:** Un conjunto cuyos elementos representan todos los posibles resultados de un experimento. El espacio muestral de un experimento siempre

existe y no es necesariamente único pues, dependiendo de nuestra valoración de los resultados, podemos construir diferentes espacios muestrales. (Herrera)

- **Evento aleatorio simple:** Subconjunto del espacio muestral formado por un único elemento (Glencoe).
- **Evento aleatorio:** Es un subconjunto de un espacio muestral, es decir, un conjunto de posibles resultados que se pueden dar en un experimento aleatorio. (matematicas10.net, s.f.)
- **Complemento:** El complemento de un evento A se representa por $-A$ y es el evento que contiene todos los elementos que no están en A . El evento $-A$ ocurre si A no ocurre.
- **Operaciones entre eventos:** Unión de eventos, Intersección de eventos y Complemento.
- **Variable:** Son las características que podemos encontrar en una población. El dominio de una variable es el conjunto de las distintas modalidades o valores que puede tomar. De acuerdo al tipo de datos que representan, se utiliza el término “modalidad” cuando hablamos de caracteres cualitativos y el término “valor” cuando estudiamos caracteres cuantitativos.
- **Variables cualitativas:** Las que no aparecen en forma numérica, sino como categorías o atributos (sexo, profesión, color). Es decir, describe una cualidad, no una cantidad numérica. Las variables cualitativas sólo pueden ser nominales u ordinales.
- **Variables cuantitativas:** Las que pueden expresarse numéricamente (temperatura, salario, número de goles en un partido, edad, etc). Se pueden cuantificar los resultados experimentales por medio de instrumentos adoptando unidades de medida para valorar los diferentes resultados. Pueden ser discretas o continuas.
- **Variables discretas:** Por ejemplo, en un grupo determinado de 5 niños, el número de quienes recibieron cuando menos un juguete electrónico en Navidad sería 0, 1, 2, 3, 4 ó 5. No puede haber un número entre estos valores, como 2.338.

- **Variable continua:** La temperatura exacta afuera del salón mientras se desarrolla la clase puede ser: 3.114, 19.872, o 28.333 grados centígrados, o cualquiera de una infinidad de otros valores en el intervalo de temperaturas donde se ubica la escuela.
- **Función:** En matemáticas es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. Correspondencia o relación f de los elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto B ; Los valores que tomará una variable dependiendo del valor de otra.

Teoría de probabilidad

La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, las ciencias y la filosofía para sacar conclusiones sobre la probabilidad discreta de sucesos potenciales y la mecánica subyacente discreta de sistemas complejos.

El cálculo de la probabilidad se realiza siguiendo la clásica formulación de Pascal:

$$P = \frac{NCF}{NCP}$$

Donde NCF representa : Número de casos favorables y NCP: Número de casos Posibles.

Ejemplo:

Un paciente pregunta sobre la probabilidad de curarse de una enfermedad y en el hospital donde lo están atendiendo se han tratado hasta el momento 300 casos del mismo tipo de enfermedad y se han curado 30 pacientes. Bajo estas condiciones, la probabilidad de curación es:

$$P = \frac{30}{300} = 0.1$$

Axiomas de la probabilidad

En todo espacio de probabilidad deben cumplirse los siguientes axiomas:

Si Ω es el espacio muestral de un determinado experimento aleatorio, $P(\Omega) = 1$

Ω : Es suceso seguro

Si A es un suceso perteneciente a un determinado experimento.

Entonces: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Dado un espacio muestral finito y una sucesión de sucesos A_1, A_2, \dots, A_n mutuamente excluyente, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Regla general de la adición

La regla de la adición o regla de la suma establece que la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento en particular es igual a la suma de las probabilidades individuales, si es que los eventos son mutuamente excluyentes, es decir, que dos no pueden ocurrir al mismo tiempo.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son mutuamente excluyente. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si A y B son no excluyentes.

Siendo: $P(A)$ = probabilidad de ocurrencia del evento A. $P(B)$ = probabilidad de ocurrencia del evento B. $P(A \cap B)$ = probabilidad de ocurrencia simultánea de los eventos A y B. (Pascal & Andrei)

Ejemplo:

Se estima que el 15% de los estudiantes de un colegio elige celebrar la fiesta del día del estudiante con un desfile musical (A), mientras que el 25% prefiere una competencia deportiva (B), y el 5% está conforme con que se hagan ambos tipos de eventos ($A \cap B$).

Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no esté de acuerdo ni con el desfile ni con la competencia deportiva

Datos del problema:

$$P(A) = 0.15 \quad P(B) = 0.25 \quad P(A \cap B) = 0.05$$

- -

En el problema se pide: $P(A \cup B)$

Primero se debe encontrar la probabilidad de que el estudiante elegido al azar, prefiera el desfile musical o la competencia deportiva, es decir $P(A \cup B)$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= 0.15 + 0.25 - 0.05 \\
&= 0.35
\end{aligned}$$

Luego, tomando este resultado de base, encontraremos a algún estudiante que no quiera ninguna de las dos actividades.

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - 0.35 \\
&= 0.65
\end{aligned}$$

Probabilidad condicional

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral E. Se llama probabilidad del suceso B condicionado a A y se representa por $P(B/A)$ a la probabilidad del suceso B una vez ocurrido el suceso A.

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Ejemplo:

En una ciudad el 2% de sus habitantes son mayores de 75 años y el 1% padece de hipertensión y tiene más de 75 años. Si un individuo tiene más de 75 años ¿Cuál es la probabilidad de que tenga hipertensión?

A: La persona tiene más de 75 años.

B: La persona tiene hipertensión.

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.01}{0.02} = 0.5$$

Teorema de la multiplicación

Teniendo en cuenta la definición de la probabilidad condicionada:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

El teorema de la multiplicación viene dado por:

$$P = (A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Ejemplo:

En un servicio de medicina interna el 40% de los pacientes ingresados es a causa de enfermedades infecciosas (A). La probabilidad de que un paciente sea diabético (B), sabiendo que tiene una infección, es del 25%.

Calcular la probabilidad de que un paciente ingresado en un servicio de medicina interna sea diabético y tenga una infección ($A \cap B$)

Datos:

$$P(A) = 0.4 \quad P(B/A) = 0.25$$

Por la regla de la multiplicación tenemos:

$$\begin{aligned} P = (A \cap B) &= P(A)P(B/A) \\ &= (0.4) (0.25) \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

Independencia de Sucesos

Desde un punto de vista formal, se puede decir que A y B son sucesos independientes si la probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B, no sufre modificaciones desde el punto de vista matemático esto se expresa de la siguiente manera:

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$A \cap B = P(A)P(B)$$

Ejemplo:

En un centro sanitario de los pacientes intervenidos quirúrgicamente el 25% tiene alguna complicación postquirúrgica (A), el 50% tiene más de 60 años (B), y el 60% tiene más de 60 años o ha padecido alguna complicación postquirúrgica (B∪A).

¿Los sucesos, tiene más de 60 años y padece alguna complicación postquirúrgica, son independientes?

Datos:

$$P(A) = 0.25 \quad P(B) = 0.5 \quad P(B \cup A) = 0.6$$

Sabemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.6 = 0.25 + 0.5 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.25 + 0.5 - 0.6 = 0.15$$

Se debe cumplir que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$0.15 \neq 0.25 \times 0.5$$

Por lo tanto los sucesos son dependientes.

Teorema de Bayes

En la teoría de la probabilidad el teorema de Bayes es un resultado enunciado por Thomas Bayes 1701-61 y que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A (Esquerdo, 2012).

El teorema de Bayes se utiliza para revisar probabilidades previamente calculadas cuando se posee nueva información. Comúnmente se inicia un análisis de probabilidades con una asignación inicial, probabilidad a priori. Cuando se tiene alguna información adicional se procede a calcular las probabilidades revisadas o a posteriori.

El teorema de Bayes permite calcular las probabilidades a posteriori y es:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}{P(B)}$$

Donde

$P(A_i)$: probabilidad a priori

$P\left(\frac{B}{A_i}\right)$: probabilidad condicional

$P(B)$: probabilidad total

$P(A_i/B)$: probabilidad a posteriori

Ejemplo:

Una compañía armadora de computadoras portátiles compra discos duros a tres proveedores: A1, A2 y A3., A1 suministra el 55%, A2 suministra el 30% y A3 suministra el 15%.

Además, el 3% de los discos duros que provee A1., el 1% de los discos que provee A2 y el 2.5% de los discos que suministra A3 están defectuosos.

¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una memoria al azar de la totalidad suministrada esté defectuosa?

En primer lugar se debe utilizar la regla de la eliminación. Se parte del hecho de que un evento E puede tener como causa k fuentes posibles, digamos A1, A2, A3, ..., Ak. Además estas fuentes son mutuamente excluyentes y exhaustivas.

Por otro lado la ocurrencia de tal evento dependerá de que fuente lo produzca.

Entonces si queremos saber cuál es la probabilidad de que suceda tal evento, se tendría que considerar dos cosas:

- Qué probabilidad hay de que una determinada fuente esté presente, digamos la fuente A_i .
- Dada esa fuente, saber cuál es la probabilidad de que ocurra el evento E .

Los discos duros pueden provenir del proveedor A_1 o A_2 o A_3 y estas son sus probabilidades correspondientes.

$$P(A_1) = 0.55; P(A_2) = 0.30 \text{ y } P(A_3) = 0.15$$

Además puede observarse que cada proveedor tiene diferente tasa de discos defectuosos.

$$P(D | A_1) = 0.03; P(D | A_2) = 0.01 \text{ y}$$

$$P(D | A_3) = 0.025$$

Por lo tanto la probabilidad de que se seleccione al azar un disco defectuoso será:

$$P(D) = P(A_1) P(D|A_1) + P(A_2) P(D|A_2) +$$

$$P(A_3) P(D|A_3)$$

$$P(D) = (0.55)(0.03) + (0.30)(0.01) +$$

$$(0.15)(0.025) = 0.0165 + 0.003 +$$

$$+ 0.00375 = 0.02325$$

Funciones de probabilidad

Cada probabilidad es un número entre 0 y 1, y la suma de todas las probabilidades es 1.

Cuando tenemos un suceso, nos interesa saber si hay muchas o pocas posibilidades de que ocurra al realizar el experimento.

A la representación de los valores y sus probabilidades la llamamos función de probabilidad o función de masa.

La función de probabilidad será, pues, una relación entre el conjunto de los posibles resultados y el conjunto de números reales, que asignará a cada suceso la probabilidad de que se verifique.

Es decir, la relación entre cada posible resultado, y la probabilidad que tiene cada uno.

La notación: $P(x_i)$ significará: probabilidad de que se verifique el suceso x_i .

Otra notación utilizada es:

$$P(x_i) = P[w / X(w) = x_i] = f(x_i)$$

Por lo tanto, siempre que sea posible, expresaremos las distribuciones de probabilidad por medio de ecuaciones, de lo contrario, se dará una tabla (o un histograma) que muestre la correspondencia entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades asociadas.

Distribuciones de Probabilidad

Variable discreta

En teoría de la probabilidad y estadística, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho suceso ocurra.

Ejemplo:

Realizar la distribución de probabilidades para obtener puntos al lanzar dos dados (variable discreta).

En la Tabla #2, veremos la distribución de frecuencia de este caso.

| Puntos | Frecuencia |
|---------------|-------------------|
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 4 |
| 6 | 5 |
| 7 | 6 |

| | |
|---------------|-----------|
| 8 | 5 |
| 9 | 4 |
| 10 | 3 |
| 11 | 2 |
| 12 | 1 |
| Total: | 36 |

Tabla 2. Distribución de frecuencia para el lanzamiento de dos dados.

Ahora, el problema nos manda a encontrar la distribución de probabilidad de estos datos. Por lo que ilustraremos con la Tabla #3 dicha probabilidad.

| Puntos | Probabilidad |
|---------------|-----------------------|
| 2 | 1 / 36 |
| 3 | 2 / 36 |
| 4 | 3 / 36 |
| 5 | 4 / 36 |
| 6 | 5 / 36 |
| 7 | 6 / 36 |
| 8 | 5 / 36 |
| 9 | 4 / 36 |
| 10 | 3 / 36 |
| 11 | 2 / 36 |
| 12 | 1 / 36 |
| Suma: | 36 / 36 = 1.00 |

Tabla 3. Distribución de probabilidad del lanzamiento de dos dados.

Esperanza matemática

La esperanza matemática de una variable aleatoria X es el número que expresa el valor medio del fenómeno que representa dicha variable.

La esperanza matemática, también llamada valor esperado, es igual al sumatorio de las probabilidades de que exista un suceso aleatorio, multiplicado por el valor del suceso aleatorio. (Glencoe)

Ejemplo: Calcular la esperanza para la v.a.d. definida como la suma de los números que resulten del lanzamiento de 2 dados (Figura #4).

| X | frec | N | P(X) | X * P(X) |
|----|------|----|------|----------|
| 2 | 1 | 36 | 0.03 | 0.06 |
| 3 | 2 | 36 | 0.06 | 0.17 |
| 4 | 3 | 36 | 0.08 | 0.33 |
| 5 | 4 | 36 | 0.11 | 0.56 |
| 6 | 5 | 36 | 0.14 | 0.83 |
| 7 | 6 | 36 | 0.17 | 1.17 |
| 8 | 5 | 36 | 0.14 | 1.11 |
| 9 | 4 | 36 | 0.11 | 1.00 |
| 10 | 3 | 36 | 0.08 | 0.83 |
| 11 | 2 | 36 | 0.06 | 0.61 |
| 12 | 1 | 36 | 0.03 | 0.33 |

Figura 4. Esperanza matemática en el lanzamiento de dos dados.

Variable continua

Una distribución continua describe las probabilidades de los posibles valores de una variable aleatoria continua. Una variable aleatoria continua es una variable aleatoria con un conjunto de valores posibles (conocido como el rango) que es infinito y no se puede contar.

Las probabilidades de las variables aleatorias continuas (X) se definen como el área por debajo de la curva de su PDF. Por lo tanto, solo los rangos de valores pueden tener una probabilidad diferente de cero. La probabilidad de que una variable aleatoria continua equivalga a algún valor siempre es cero (matematicas10.net, s.f.).

Ejemplo:

La distribución normal continua puede describir la distribución del peso de hombres adultos. Por ejemplo, usted puede calcular la probabilidad de que un hombre pese entre 160 y 170 libras. (Figura #5).

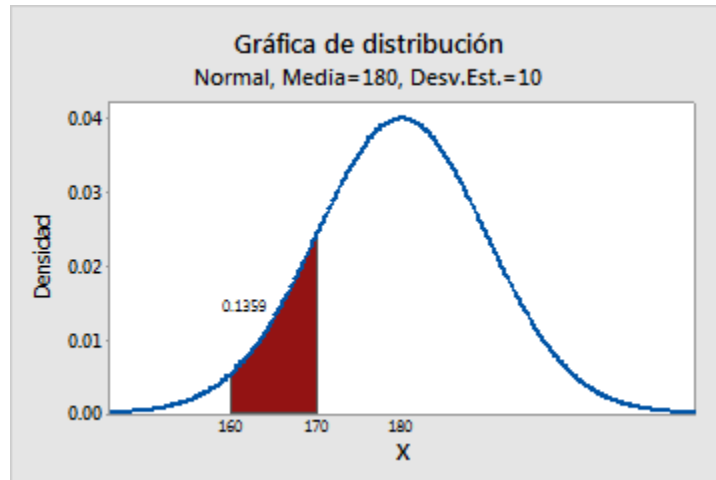


Figura 5. Probabilidad de una variable continua.

El área sombreada debajo de la curva en este ejemplo representa el rango de 160 a 170 libras. El área de este rango es 0.136; por lo tanto, la probabilidad de que un hombre seleccionado aleatoriamente pese entre 160 y 170 libras es de 13.6%. Toda el área por debajo de la curva equivale a 1.0.

Sin embargo, la probabilidad de que X sea exactamente igual a algún valor siempre es cero, porque el área por debajo de la curva en un punto individual, que no tiene anchura, es cero. Por ejemplo, la probabilidad de que un hombre pese exactamente 190 libras es cero. Podría calcular una probabilidad diferente de cero de que un hombre pese más de 190 libras, menos de 190 libras o entre 189.9 y 190.1 libras, pero la probabilidad de que pese exactamente 190 libras es cero.

Capítulo III: Generación de números aleatorios

En simulación, el concepto de aleatoriedad tiene utilidad en las siguientes situaciones:

Primero, a través de fenómenos estrictamente aleatorios como por ejemplo: el resultado de tirar un dado, girar una ruleta, extraer una balota en el sorteo de la lotería, etc.

También existen situaciones que se asumen como aleatoria por falta de mayor información, a fin de simplificar la lógica del modelo de simulación.

En estos casos, la variable podría ser calculada determinísticamente, pero modelarla como tal implica un costo que no se justifica en función de la calidad de los resultados de la simulación.

Propiedades de los números aleatorios

Una secuencia R_1, R_2, \dots , de números aleatorios debe satisfacer dos propiedades fundamentales:

- Uniformidad: los números de la secuencia siguen una distribución continua uniforme con valores comprendidos entre 0 y 1.
- Independencia: cada valor R_i de la secuencia es independiente de los restantes valores R_j de la secuencia.

Sin embargo la generación de los números aleatorios puros conlleva un alto costo de recursos y tiempo, por lo que se opta la utilización de los llamados números pseudoaleatorios, que no son más que números “aleatorios” generados utilizando una computadora.

La aleatoriedad o azar es simulada mediante técnicas computacionales que intentan generar secuencias de números entre 0 y 1 que respeten las propiedades de los números aleatorios reales (Wedelprofesor).

Algunas situaciones problemáticas que se dan en la generación de números pseudoaleatorios son las siguientes:

- Los números generados pueden no estar uniformemente distribuidos.

- Los números generados pueden estar discretamente valuados en vez de continuamente valuados.
- La media y la varianza de los números generados puede ser muy alta o muy baja.
- Puede existir dependencias y autocorrelación entre números.
- Números sucesivamente altos o bajos en posiciones adyacentes de la secuencia.
- Varios números por debajo de la media seguidos de varios números por encima de la media.

Para evitar estos problemas, los números pseudoaleatorios deben cumplir con los siguientes requisitos (Matsumoto & Nishimura, 1998):

- Confiabilidad, la secuencia debe cumplir en forma muy cercana las propiedades de los números aleatorios.
- Eficiencia, bajos run-times para generar secuencias aleatorias.
- Portabilidad, es necesario poder contar con un generador de números aleatorios cuya confiabilidad no dependa de la arquitectura de la máquina o del sistema operativo utilizado.
- Ciclos largos, la secuencia de números aleatorios debe ser lo más extensa posible antes de empezar a repetir valores.
- Replicabilidad, para muchos experimentos es necesario poder efectuar corridas con la misma secuencia aleatoria. Uso de semillas.

Una herramienta muy utilizada para generar números pseudoaleatorios es Excel. En la Figura #6 veremos un ejemplo de cómo generar números aleatorios utilizando Excel.

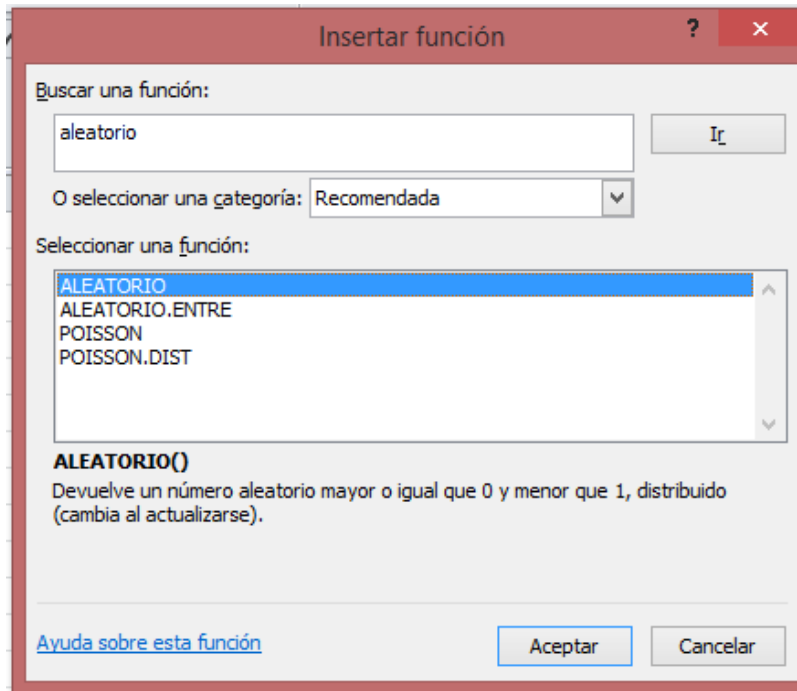


Figura 6. Generación de números aleatorios en Excel.

Técnicas para la generación de números aleatorios

Existen diversos métodos a la hora de generar los números aleatorios. Se agrupan en dos métodos: Algoritmos no congruenciales y algoritmos congruenciales (Rodríguez González, y otros, 2011):

Algoritmos No Congruenciales

- **Método de los cuadrados medios**

Propuesto en la década de los cuarenta del siglo XX por John von Neumann y Nicholas Metrópolis, este algoritmo necesita un número entero, denominado semilla, con D dígitos, este es elevado al cuadrado para seleccionar del resultado los D dígitos del centro; el primer número r se determina simplemente anteponiendo el "0" a esos dígitos. Para obtener el segundo r se sigue el mismo procedimiento, sólo que ahora se elevan al cuadrado los D dígitos del centro que se seleccionaron para obtener el primer n . Este método se repite hasta obtener n números n (Cao Abad, 2002).

Pasos para generar números con el algoritmo de cuadrados medios:

1. Seleccionar semilla (X_0) con D dígitos ($D > 3$).

2. Sea X_0 = resultado de elevar X_0 al cuadrado; sea X_i = los D dígitos del centro, y sea $r = 0.D$ dígitos del centro.
3. Sea Y_i = resultado de elevar X_i al cuadrado; sea X_{i+1} = los D dígitos del centro, y sea $r = 0.D$ dígitos del centro para toda $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
4. Repetir el paso 3 hasta obtener los n números r deseados.

Es importante destacar que si no es posible obtener los D dígitos del centro del número Y_i , entonces deben agregarse ceros a la izquierda del número Y_i .

Ejemplo:

Generar los primeros 5 números r a partir de una semilla $X_0 = 6453$, donde se observa que $D = 4$ dígitos.

Solución:

| Semilla | Numero aleatorio | Numero pseudoaleatorio |
|-----------------------------|------------------|------------------------|
| $Y_0 = (6453)^2 = 41641209$ | 6414 | 0.6412 |
| $Y_1 = (6412)^2 = 41113744$ | 1137 | 0.1137 |
| $Y_2 = (1137)^2 = 1292769$ | 2927 | 0.2927 |
| $Y_3 = (2927)^2 = 8567329$ | 5673 | 0.5673 |
| $Y_4 = (5673)^2 = 32182929$ | 1829 | 0.1829 |

- **Algoritmo de productos medios**

La mecánica de generación de números pseudoaleatorios de este algoritmo no congruencial es similar a la del algoritmo de cuadrados medios.

La diferencia entre ambos radica en que el algoritmo de productos medios utiliza dos semillas, ambas con D dígitos; en este caso las semillas no son elevadas al cuadrado sino que se multiplican y del producto se seleccionan los D dígitos del centro (García Dunna & García Reyes).

A continuación se presentan con más detalle los pasos del método para generar números con el algoritmo de producto medios.

1. Seleccionar una semilla (X_0) con D dígitos ($D > 3$).
2. Seleccionar una semilla (X_1) con D dígitos ($D > 3$).
3. Sea $Y_0 = X_0 * X_1$; sea $X_2 =$ los D dígitos del centro, y sea $r = 0.D$ dígitos del centro.
4. Sea $Y_i = X_i * X_{i+1}$; sea $X_{i+2} =$ los D dígitos del centro, y sea $r_{i+1} = 0.D$ dígitos del centro para toda $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
5. Repetir el paso 4 hasta obtener los n números r_i deseados.

Nota: Si no es posible obtener los D dígitos del centro del número Y_i agregue ceros a la izquierda del número T_i .

Algoritmos Congruenciales

- **Algoritmo Lineal**

Fue propuesto por D.H. Lehmer en 1951. El algoritmo congruencial lineal genera una secuencia de números enteros por medio de la siguiente ecuación recursiva (Alberto, Schwer, Cámara, & Fumero, 2005):

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \bmod (m) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \text{ donde;}$$

$X_0 =$ es la semilla, $X_0 > 0$ y debe ser entero.

$a =$ es la constante multiplicativa, $a > 0$ y debe ser entero.

$c =$ constante aditiva, $c > 0$ y debe ser entero.

$\bmod m =$ modulo, significa realizar las operaciones anteriores y dividir el resultado entre el valor de m , para obtener solamente el residuo.

Es importante señalar que la ecuación recursiva del algoritmo congruencial lineal genera una secuencia de números enteros $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, m-1\}$, y que para obtener números pseudo aleatorios en el intervalo $(0,1)$ se requiere la siguiente ecuación:

X_i

$$r_i = 7^i \cdot 7^{-1}$$

Para que el algoritmo sea capaz de lograr el máximo periodo de vida n , es preciso que dichos parámetros cumplan ciertas condiciones, Banks, Carson, Nelson y Nicol sugieren lo siguiente:

$$m = 2^g$$

$$a = 1 + 4k$$

k , debe ser entero.

c , relativamente primo a m .

g , debe ser entero.

Bajo estas condiciones se obtiene un periodo de vida máximo $N = m = 2^g$.

Ejemplo:

Generar suficientes números entre 0 y 1 con los parámetros $X_0 = 6$, $k = 3$,

$g = 3$, $c = 7$, hasta encontrar el periodo de vida máximo (N). Algoritmos Congruenciales d)

Algoritmo Lineal Este algoritmo congruencial fue propuesto por D.H. Lehmer en 1951.

Según Law y Kelton, este algoritmo ha sido el más usado. El algoritmo congruencial lineal

genera una secuencia de números enteros por medio de la siguiente ecuación recursiva:

$X_{i+1} = (aX_i + c) \text{ mod } (m)$ $i = 0, 1, 2, 3 \dots n$ donde; $X_0 =$ es la semilla, $X_0 > 0$ y debe ser

entero. $a =$ es la constante multiplicativa, $a > 0$ y debe ser entero. $c =$ constante aditiva, c

> 0 y debe ser entero. $\text{mod } m =$ modulo, significa realizar las operaciones anteriores y

dividir el resultado entre el valor de m , para obtener solamente el residuo. Es importante

señalar que la ecuación recursiva del algoritmo congruencial lineal genera una secuencia

de números enteros $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, m-1\}$, y que para obtener números pseudo aleatorios

en el intervalo $(0, 1)$ se requiere la siguiente ecuación: X_i $r_i = \dots 7^i \cdot 7^{-1}$ Para que el

algoritmo sea capaz de lograr el máximo periodo de vida n , es preciso que dichos parámetros cumplan ciertas condiciones, Banks, Carson, Nelson y Nicol sugieren lo siguiente: $m = 2g$ $a = 1 + 4k$ k , debe ser entero. c , relativamente primo a m . g , debe ser entero. Bajo estas condiciones se obtiene un periodo de vida máximo $N = m = 2g$.

Tests para números aleatorios

Existen varios tests que ayudan a establecer si una secuencia de números pseudo-aleatorios respeta las propiedades de los números aleatorios:

- Tests de Frecuencia
- Tests de Corridas
- Tests de Autocorrelación
- Tests de Gap
- Tests de Poker

Capítulo IV: Teoría de Colas

Las colas son un objeto frecuente en la vida cotidiana. Podemos encontrarle diversas aplicaciones tales como:

- En un cajero
- En un restaurante de comidas rápidas
- Al reservar una cita médica

La teoría de colas es una disciplina, dentro de la Investigación Operativa, que tiene por objeto el estudio y análisis de situaciones en las que existen entes que demandan cierto servicio, de tal forma que dicho servicio no puede ser satisfecho inmediatamente, por lo cual se producen esperas (González Ariza, 2003).

Existen diversos tipos de sistemas de colas. El objetivo de todos es determinar el estado estable del sistema y determinar una capacidad de servicio apropiada.

Descripción de un sistema de colas

Un sistema de colas puede dividirse entre la cola y la instalación del servicio. Sin embargo para mayor facilidad en el análisis del sistema, hemos de introducir otros elementos como los que mencionaremos a continuación (C., 2011):

- **Fuente de entrada:** Conjunto de individuos u objetos que solicitan el servicio en cuestión.
- **Cliente:** Es todo individuo que solicita el servicio.
- **Capacidad de la cola:** El máximo de clientes que pueden estar en la cola. Puede suponerse finito o infinito.
- **Disciplina de la cola:** Es el modo en el que los clientes son seleccionados para ser servidos.
- **Mecanismo de servicio:** Es el procedimiento por el cual se da el servicio que los clientes solicitan. Para determinar totalmente el mecanismo de servicios, debemos conocer el número de servidores.

En un modelo básico, el comportamiento de una cola se resume en el primero en llegar, primero en ser servido. Sin embargo también existen otros comportamientos en las colas que se valen de reglas o prioridades. En la Figura #7, se observa una representación de un modelo de cola básico.

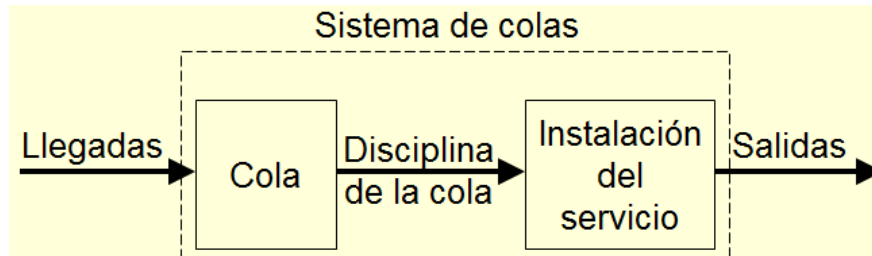


Figura 7. Modelo de cola básico.

Costos de un sistema de colas

En un sistema de colas se pueden encontrar varios costos. Entre ellos están:

- **Costo de espera:** Es el costo para el cliente al esperar. Representa el costo de oportunidad del tiempo perdido. Un sistema con un bajo costo de espera es una fuente importante de competitividad
- **Costo de servicio:** Es el costo de operación del servicio brindado. Es más fácil de estimar que el costo de espera.

El objetivo de un sistema de colas es encontrar el sistema del costo total mínimo.

Llegadas

El tiempo que transcurre entre dos llegadas sucesivas en el sistema de colas se llama tiempo entre llegadas. El tiempo entre llegadas tiende a ser muy variable.

El número esperado de llegadas por unidad de tiempo se llama tasa media de llegadas (λ)

El tiempo esperado entre llegadas es $1/\lambda$

Por ejemplo, si la tasa media de llegadas es $\lambda = 50$ clientes por hora

Entonces el tiempo esperado entre llegadas es $1/\lambda = 1/50 = 0.02$ horas ó 2 minutos

Además es necesario estimar la distribución de probabilidad de los tiempos entre llegadas.

Distribución exponencial

Generalmente se supone una distribución exponencial, lo cual depende del comportamiento de las llegadas.

La forma algebraica de la distribución exponencial es:

$$P(\text{tiempo de servicio} \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

Donde t representa una cantidad expresada en (horas, minutos, etc.) de tiempo unidades de tiempo.

La distribución exponencial supone una mayor probabilidad para tiempos entre llegadas pequeños. En general, se considera que las llegadas son aleatorias es decir que la última llegada no influye en la probabilidad de llegada de la siguiente.

En la Figura #8, se observa la gráfica de la distribución exponencial:

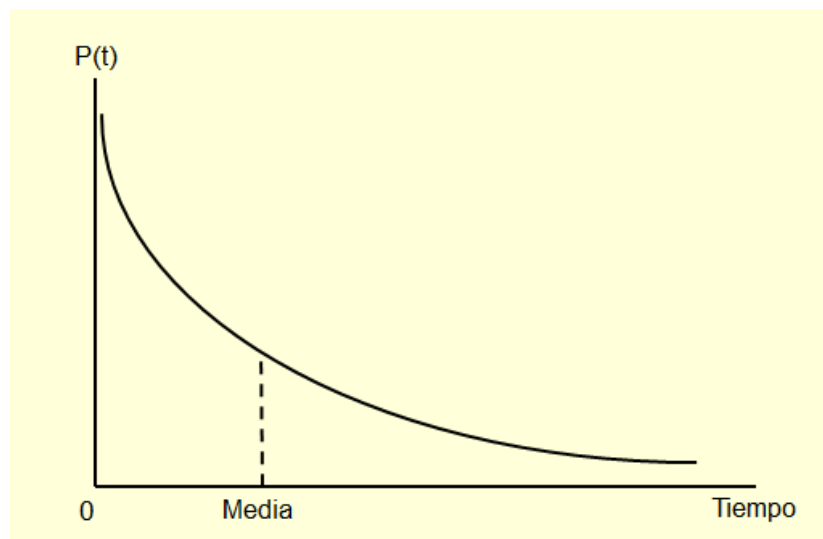


Figura 8. Comportamiento de la distribución exponencial.

Distribución de Poisson

Es una distribución discreta empleada con mucha frecuencia para describir el patrón de las llegadas a un sistema de colas.

Para tasas medias de llegadas pequeñas es asimétrica y se hace más simétrica y se aproxima a la binomial para tasas de llegadas altas.

Su forma algebraica es:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Dónde:

$P(k)$: probabilidad de k llegadas por unidad de tiempo

λ : tasa media de llegadas

$e = 2,7182818\dots$

En la Figura #9, se observa el comportamiento de la distribución de Poisson,

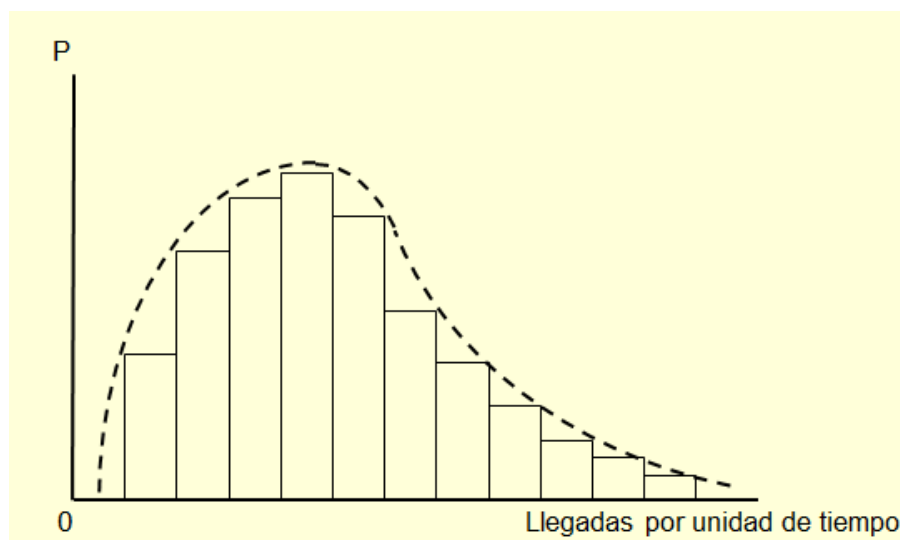


Figura 9. Comportamiento de la distribución de Poisson.

La cola

- El número de clientes en la cola es el número de clientes que esperan el servicio.
- El número de clientes en el sistema es el número de clientes que esperan en la cola más el número de clientes que actualmente reciben el servicio.

La capacidad de la cola es el número máximo de clientes que pueden estar en la cola. Generalmente se supone que la cola es infinita. Aunque también la cola puede ser finita.

Todo va a depender de la naturaleza del sistema que se esté estudiando o de los límites que se impongan a la hora de realizar los análisis.

En cuanto a la disciplina de la cola, esta se refiere al orden en que se seleccionan los miembros de la cola para comenzar el servicio.

La más común es PEPS: primero en llegar, primero en servicio. Sin embargo pueden darse otros comportamientos como: selección aleatoria, prioridades, UEPS, entre otras.

Como siempre, dependerá de la situación a analizar. Por ejemplo en algunos casos hay servicios que ofrecen prioridad a casos excepcionales como por ejemplo en un banco la prioridad de atención a clientes ancianos, discapacitados y mujeres embarazadas

El servicio

Hay que tomar en cuenta que el servicio puede ser brindado por un servidor o por servidores múltiples. El tiempo de servicio varía de cliente a cliente, como también podría tener una duración uniforme, en situaciones como por ejemplo servicios brindados por máquinas. El tiempo esperado de servicio depende de la tasa media de servicio (μ).

Por ejemplo:

El tiempo esperado de servicio equivale a $1/\mu$

Por ejemplo, si la tasa media de servicio es de 30 clientes por hora

Entonces el tiempo esperado de servicio es $1/\mu = 1/30 = 0.03$ horas, o 3 minutos.

Es necesario seleccionar una distribución de probabilidad para los tiempos de servicio

Hay dos distribuciones que representarían puntos extremos:

- La distribución exponencial (σ =media)
- Tiempos de servicio constantes ($\sigma=0$)

Desempeño del sistema de colas

En principio el sistema está en un estado inicial. Se supone que el sistema de colas llega a una condición de estado estable (nivel normal de operación). Sin embargo, pueden

existir otras condiciones anormales (horas pico, días de pago, etc.) Para mayor facilidad de estudio, lo que interesa es el estado estable.

Para evaluar el desempeño se busca conocer dos factores principales:

- El número de clientes que esperan en la cola
- El tiempo que los clientes esperan en la cola y en el sistema

Estas son las principales medidas de desempeño de un sistema:

- Número esperado de clientes en la cola L_q
- Número esperado de clientes en el sistema L_s
- Tiempo esperado de espera en la cola W_q
- Tiempo esperado de espera en el sistema W_s

En la Figura #10, observamos las fórmulas generales de las medidas de desempeño:

$$\begin{aligned}W_s &= W_q + \frac{1}{\mu} \\L_s &= \lambda W_s \\L_q &= \lambda W_q \\L_s &= L_q + \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}$$

Figura 10. Fórmulas generales en la teoría de colas.

Ejemplo:

Suponga una estación de gasolina a la cual llegan en promedio 45 clientes por hora, se tiene capacidad para atender en promedio a 60 clientes por hora y se sabe que los clientes esperan en promedio 3 minutos en la cola. La tasa media de llegadas λ es 45 clientes por hora o $45/60 = 0.75$ clientes por minuto.

La tasa media de servicio μ es 60 clientes por hora o $60/60 = 1$ cliente por minuto

Calcule las medidas de desempeño del sistema (ver Figura #11):

$$\begin{aligned}
 W_q &= 3 \text{ min} \\
 W_s &= W_q + \frac{1}{\mu} = 3 + \frac{1}{1} = 4 \text{ min} \\
 L_s &= \lambda W_s = 0.75 \times 4 = 3 \text{ clientes} \\
 L_q &= \lambda W_q = 0.75 \times 3 = 2.25 \text{ clientes}
 \end{aligned}$$

Figura 11. Medidas de desempeño del ejemplo.

Factor de utilización del sistema

Dada la tasa media de llegadas λ y la tasa media de servicio μ , se define el factor de utilización del sistema ρ .

En general, $\rho < 1$

Su fórmula, con un servidor y con s servidores, respectivamente, está plasmada en la Figura #12:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Figura 12. Fórmula del factor de utilización del sistema con uno y varios servidores.

Ejemplo:

Con base en los datos del ejemplo anterior, $\lambda = 0.75$, $\mu = 1$

El factor de utilización del sistema si se mantuviera un servidor es

$$= \lambda/\mu = 0.75/1 = 0.75 = 75\%$$

Con dos servidores ($s = 2$):

$$= \lambda/s\mu = 0.75/(2*1) = 0.75/2 = 37,5\%$$

Modelos de Colas

Existen diferentes modelos de colas que utilizan un servidor. A continuación, presentaremos las medidas de desempeño en cada modelo y un ejemplo para ilustrar.

- **Modelo M/M/1**

Un servidor con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales.

En la Figura #13 se presentan las medidas de desempeño del sistema:

$$\begin{aligned}
 L_s &= \frac{\lambda}{\lambda - \mu} & L_q &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \\
 W_s &= \frac{1}{\mu - \lambda} & W_q &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \\
 P_n &= (1 - \rho)\rho^n & P(L_s > n) &= \rho^{n+1} \\
 P(W_s > t) &= e^{-\mu(1-\rho)t} & P(W_q > t) &= \rho e^{-\mu(1-\rho)t} \\
 & & t &\geq 0, \rho < 1
 \end{aligned}$$

Figura 13. Medidas del desempeño del modelo M/M/1.

- **Modelo M/G/1**

Un sistema M/G/1 tiene una llegada de tipo exponencial de clientes de tasa λ , la atención de cada uno de ellos toma un tiempo de servicio con media $1/\mu$ y varianza σ^2 y cuenta con sólo un servidor. Cuando la distribución G del lapso de servicio es constante es decir el tiempo de atención es fijo, entonces $\sigma^2 = 0$ (Donoso & Scheller-wolf, 2008).

Para este sistema se cumplen las siguientes medidas de desempeño (ver Figura #14):

$$\begin{aligned}
 L_s &= L_q + \rho & L_q &= \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)} \\
 W_s &= W_q + \frac{1}{\mu} & W_q &= \frac{L_q}{\lambda} \\
 P_0 &= 1 - \rho & P_w &= \rho \\
 & & \rho &< 1
 \end{aligned}$$

Figura 14. Medidas del desempeño del modelo M/G/1.

- **Modelo M/D/1**

En la Figura #15 se observa las medidas de desempeño:

$$L_s = \lambda W_s \quad L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\rho < 1$$

Figura 15. Medidas del desempeño en la cola M/D/1.

- **Modelo M/E_k/1**

En la Figura #16 se observa las medidas de desempeño:

$$L_s = \lambda W_s \quad L_q = \frac{\rho^2(k+1)}{2k(1-\rho)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\rho < 1$$

Figura 16. Medidas del desempeño en la cola M/E_k/1.

Existen algunos modelos de varios servidores, como por ejemplo:

- **M/M/s**: s servidores con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales.
- **M/D/s**: s servidores con tiempos entre llegadas exponenciales y una distribución degenerada de tiempos de servicio.
- **M/E_k/s**: s servidores con tiempos entre llegadas exponenciales y una distribución Erlang de tiempos de servicio.

Método de Montecarlo

La simulación de Monte Carlo es un proceso estocástico numérico, es decir, una secuencia de estados cuya evolución viene determinada por sucesos aleatorios (Illana, 2013). Es preciso recordar que un suceso aleatorio es un conjunto de resultados que se producen con cierta probabilidad.

La simulación de Monte Carlo hace uso de la estadística y la computación para imitar, mediante modelos matemáticos, el comportamiento aleatorio de sistemas reales no dinámicos.

Este método proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista.

Claves del método de Montecarlo:

- Crear un modelo matemático del sistema que se requiere analizar.
- Identificar las variables cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema.
- Se lleva a cabo un experimento consistente en generar muestras aleatorias para las variables.
- Tras repetir n veces este experimento, dispondremos de n observaciones sobre el comportamiento del sistema.

Entre mayor sea el número de experimentos, más exactos serán los resultados.

Algunos ejemplos de aplicaciones del método de Montecarlo, se da en los siguientes campos:

- Criptografía
- Programación
- Dinámica cuántica
- Ecología
- Pronósticos de la Bolsa
- Sistemas de colas
- Prospecciones en explotaciones petrolíferas

Ejemplo:

Una forma de hacer pruebas de Monte Carlo es con una hoja de cálculo como Microsoft Excel. En el ejemplo se muestra un análisis histórico de 200 días sobre consultas realizadas en un sistema de información. La Figura #17 muestra el número de consultas diarias (de 0 a 5) junto con las frecuencias absolutas (número de días por cada frecuencia), las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas.

| | A | B | C | D |
|---|-----------|--------------------|---------------------|-------------------------------|
| | Consultas | Frecuencia en días | Frecuencia relativa | Frecuencia relativa acumulada |
| 1 | | | | |
| 2 | 0 | 10 | 0,05 | 0,05 |
| 3 | 1 | 20 | 0,1 | 0,15 |
| 4 | 2 | 40 | 0,2 | 0,35 |
| 5 | 3 | 60 | 0,3 | 0,65 |
| 6 | 4 | 40 | 0,2 | 0,85 |
| 7 | 5 | 30 | 0,15 | 1 |
| 8 | | 200 | 1 | |

Figura 17. Ejemplo del teorema de Montecarlo.

Podemos interpretar la frecuencia relativa como la probabilidad de que ocurra el suceso asociado, en este caso, la probabilidad de un determinado número de consultas (así, p.e., la probabilidad de que se den 3 consultas en un día sería de 0,30), por lo que la tabla anterior nos proporciona la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta (la variable aleatoria es el número de consultas, que sólo puede tomar valores enteros entre 0 y 5).

Supongamos que queremos conocer el número esperado (o medio) de consultas por día.

Una forma directa es haciendo la operación

$$\text{Valor Medio} = \text{sumatoria (\#de visitas*Probabilidad de que ocurran)} = 0*0,05+1*0,1+2*0,2+3*0,3+4*0,2+5*0,15=2,95$$

Por otro lado se puede usar una simulación Monte Carlo para deducirla. Para ello se tiene en cuenta las frecuencias relativas acumuladas de esta manera:

- [0,00 a 0,05) para el suceso 0
- [0,05 a 0,15) para el suceso 1
- [0,15 a 0,35) para el suceso 2
- [0,35 a 0,65) para el suceso 3
- [0,65 a 0,85) para el suceso 4
- [0,85 a 1,00) para el suceso 5

Esto significa que, al generar un número pseudo-aleatorio con la computadora (proveniente de una distribución uniforme entre 0 y 1), el resultado, obtenido de forma aleatoria y según la distribución de probabilidad anterior, estará asociado a un suceso.

Así por ejemplo, si la computadora nos proporciona el número pseudo-aleatorio 0,2567, podremos suponer que ese día se han producido 2 consultas.

Capítulo V: Simulación con el software Arena

El software de simulación ARENA es una herramienta que permite construir el modelo del sistema o proceso a estudiar de manera gráfica mediante la utilización de una serie de módulos. Una vez realizado el 'organigrama' del sistema, se introducen los datos de dichos módulos y se ejecuta la simulación (Altiok & Melamed, 2007).

La ventana principal del software ARENA presenta tres regiones o ventanas correspondientes a (Vieira, Dias, Pereira, & Oliveira):

- Barra de Proyectos
- Organigrama o Modelo
- Datos

La **Barra de Proyectos** (ventana vertical a la izquierda) presenta los diferentes paneles de módulos que se pueden utilizar; en este curso se utilizarán los correspondientes al Panel de Basic Process (en la Barra de Proyectos de la figura se ilustran los módulos correspondientes al panel Basic Process). Los paneles Advanced Process y Advanced Transfer suministran otros módulos orientados a la construcción de modelos de cierto grado de complejidad. En la Figura #18 podemos observar la interfaz general del software Arena.

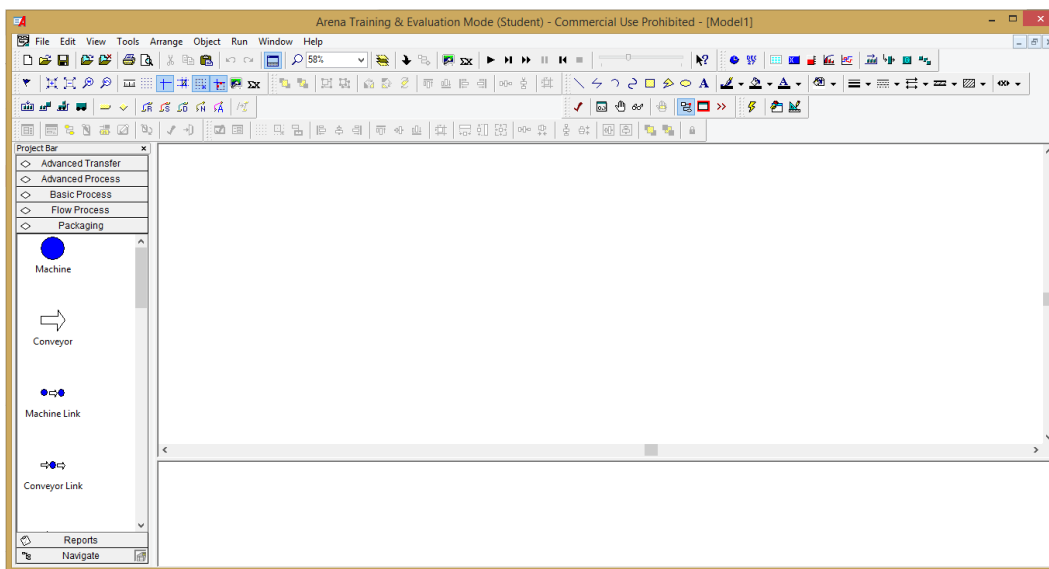


Figura 18. Interfaz del software Arena.

Los módulos de datos no se ubican en la ventana de Modelo, sino que se editan mediante un mecanismo similar a las hojas de cálculo y se visualizan en la ventana inferior a la ventana del Modelo, llamada Ventana de Datos. Estos módulos sirven para definir las características de los diferentes módulos del proceso como son las colas y recursos.

Algunos términos que son precisos conocer para manejar el software Arena son (Altarazi & Ammouri, 2018):

- **Entidad:** Objeto de interés perteneciente al sistema; es el objeto sobre lo que actúa el proceso (por ejemplo máquinas, mensajes, documentos, clientes, piezas, etc.) Las entidades serán producidas y generalmente demandarán un servicio que será realizado por un servidor que se describirá en términos de recurso. Arena utiliza un lenguaje orientado a entidades. Las entidades representan personas, objetos o cosas, bien sean reales o imaginarias, cuyo movimiento en el sistema provoca cambios de estado del sistema.
- **Atributo:** Propiedad de una entidad. En un sistema pueden existir muchos tipos de entidades y cada una tendrá unas características propias llamadas Atributos. Los atributos representan valores definidos por el usuario y asociados a cada una de las entidades (p.e. tipo de cliente, tamaño del producto, instante en que un trabajo entra en el sistema, etc.) Todas las entidades tienen el mismo conjunto de atributos, pero con distintos valores. Arena asigna un conjunto de atributos determinados (Entity.Type, Entity.Picture, Entity.CreateTime, Entity.Station, Entity.Sequence, Entity.JobStep).
- **Actividad:** Representa un periodo de tiempo de duración específica.
- **Recurso:** Elemento utilizado para modelar un área donde hay una limitación o restricción; dichas restricciones pueden ser causadas por un número limitado de personas para realizar una acción, espacio de almacenamiento restringido, capacidad de los equipos, etc.

Se llama **capacidad de un recurso** al número de unidades de recurso idénticas disponibles para dar un servicio.

Las entidades capturan (seize) recursos para tomar control de una o más unidades del mismo, y una vez finalizado el servicio las entidades liberan (release) los recursos utilizados

- **Colas:** Área donde permanece una entidad mientras espera que un recurso está disponible o mientras espera a formar un grupo (batch) con otras entidades.
- **Variables:** Las variables representan un conjunto de valores globales que se pueden modificar o utilizar sus valores como control en cualquier parte del modelo. Arena tiene dos tipos de variables, las variables definidas por el Usuario y las variables definidas por el Sistema.

Módulos Básicos

- **Create:** Este módulo es el punto de entrada de las entidades en el modelo de simulación. Las entidades se crean en base a un tiempo entre llegadas o utilizando una planificación determinada y especifica el tipo de entidad. En la Figura #19 se muestra la edición de este módulo.

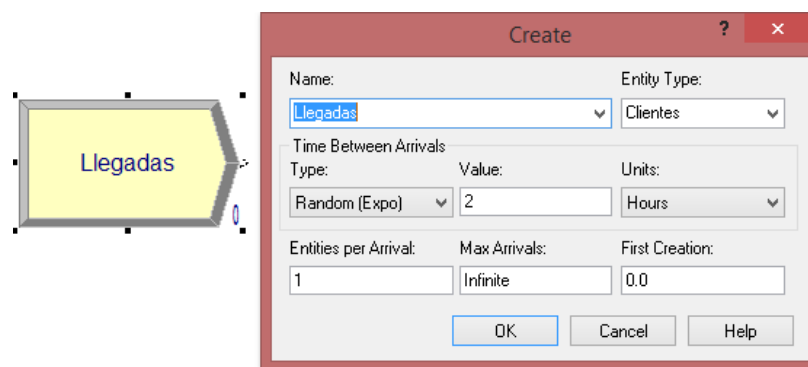


Figura 19. Módulo Create.

- **Dispose:** Este módulo es el punto final de las entidades en el modelo de simulación. Las estadísticas pueden ser registradas antes de que la entidad abandone el sistema. La ventana de la edición de este módulo la podemos apreciar en la Figura #20.

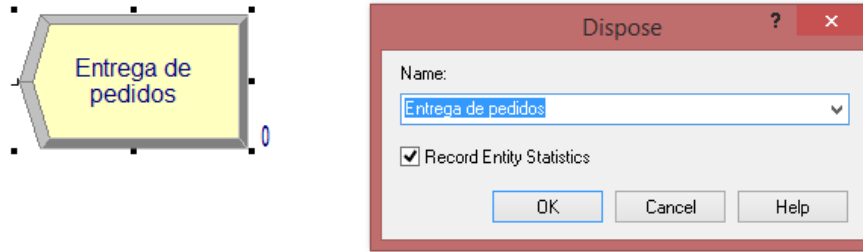


Figura 20. Módulo Dispose.

- Process:** Este módulo se ha diseñado como el principal método de procesamiento de las entidades en la simulación. Dispone de las opciones 'capturar' y 'liberar' cualquier recurso. En la Figura #21, podemos observar la configuración del módulo Process.

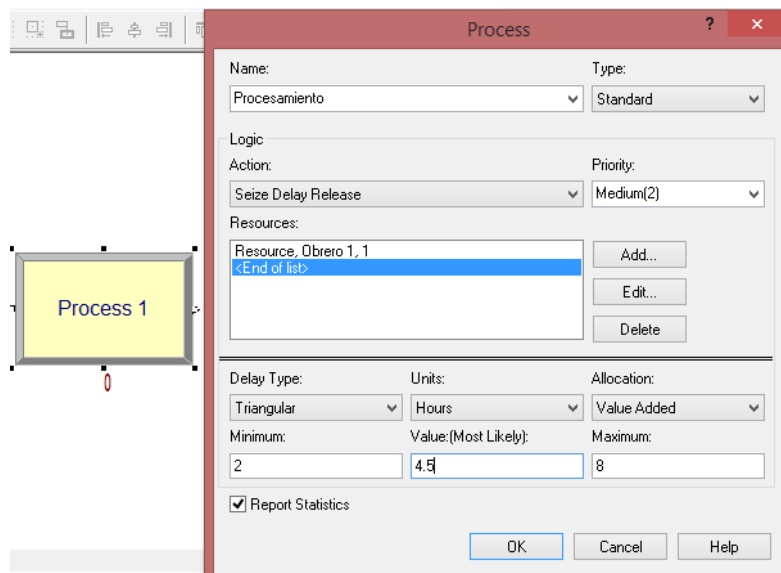


Figura 21. Módulo Process.

El Type permite describir el método de especificar la lógica que existe en el interior del módulo.

Los posibles tipos de procesamiento dentro del módulo son los siguientes (campo Action).

- Delay:** Se producirá un retraso pero no se utilizará ningún recurso o limitación.
- Seize Delay:** Uno o varios recursos se utilizarán en el módulo Process y también se producirá un retraso, y la liberación del recurso se producirá más tarde.

- **Seize Delay Release:** Se utilizará un recurso seguido de un retraso y entonces se liberará el recurso utilizado.
- **Delay Release:** indica que un recurso que ha sido previamente utilizado será liberado una vez transcurra un determinado retraso. En los casos necesarios se debe indicar la lista de recursos que son utilizados en dicho módulo y la cantidad de los mismos que serán capturados y liberados.

El campo Delay Type indica el tipo de distribución o método de especificar los parámetros del retraso; las opciones Constant y Expression requieren un único valor, mientras que Normal, Uniform y Triangular requieren varios parámetros.

- **Decide:** Este módulo permite realizar procesos de decisión en el sistema de simulación; esto incluye opciones de toma de decisiones basadas en una o más condiciones(p.e. si el tipo de entidad es Tarjeta Oro) o basado en una o varias probabilidades(p.e. 75% verdadero; 25% falso). Las condiciones se pueden basar en los valores de los atributos, valores de las variables, tipo de entidad o en una expresión(NQ(Cola del proceso Papeleo)). La ventana de edición de este módulo es presentada en la Figura #22.

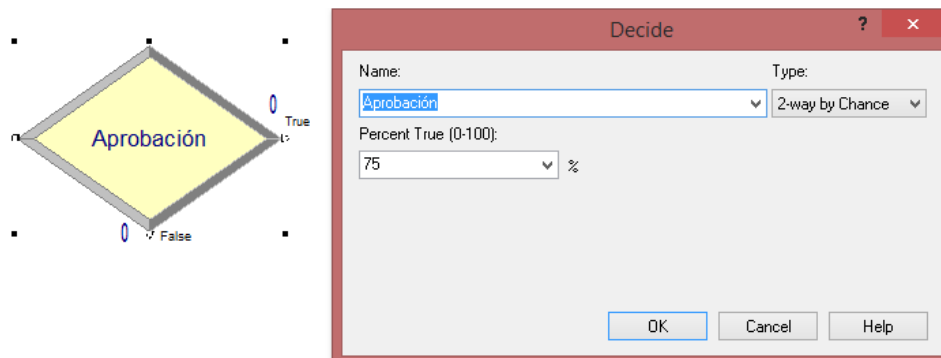


Figura 22. Módulo Decide.

- **Batch:** Este módulo permite el agrupamiento de entidades en el modelo de simulación. Las agrupaciones pueden ser permanentes o temporales. Los agrupamientos pueden realizarse basados en un número específico de entidades o basados en un atributo determinado. En la Figura #23, observamos el módulo Batch.

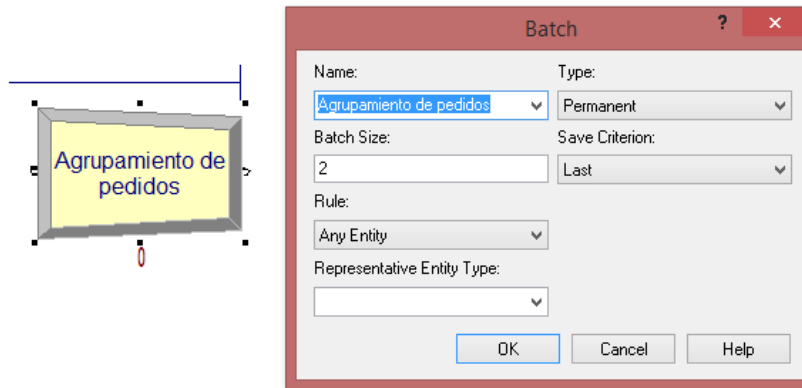


Figura 23. Módulo Batch.

- Separate:** Este módulo se utiliza para copiar una entidad entrante en múltiples entidades o para separar un entidad previamente agrupada mediante el módulo batch. En este segundo caso, la entidad temporal representativa desaparece y se recuperan las entidades originales que constituían el agrupamiento. Tal configuración es mostrada en la Figura #24.

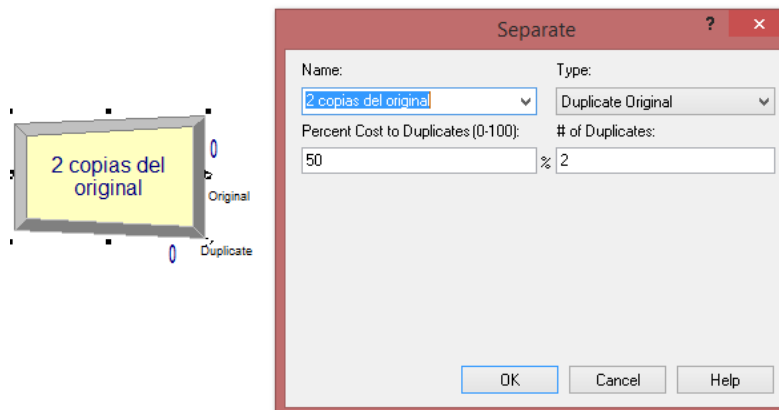


Figura 24. Módulo Separate.

- Assign:** Este módulo se utiliza para asignar a las entidades que entren al módulo nuevos valores a variables, atributos de entidades, tipos de entidades, dibujos de entidades y otras variables del sistema. Se pueden realizar múltiples asignaciones en un único módulo Assign, tal como podemos observar en la Figura #25.

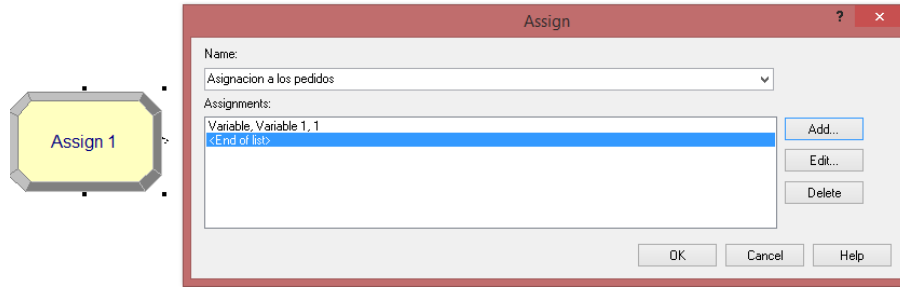


Figura 25. Módulo Assign.

- **Record:** Este módulo se utiliza para recoger las estadísticas de la simulación del modelo. Los tipos de estadísticas disponibles incluyen tiempo de salida del módulo, estadísticas de las entidades (tiempo, coste, etc.). Este módulo queda ilustrado en la Figura #26.

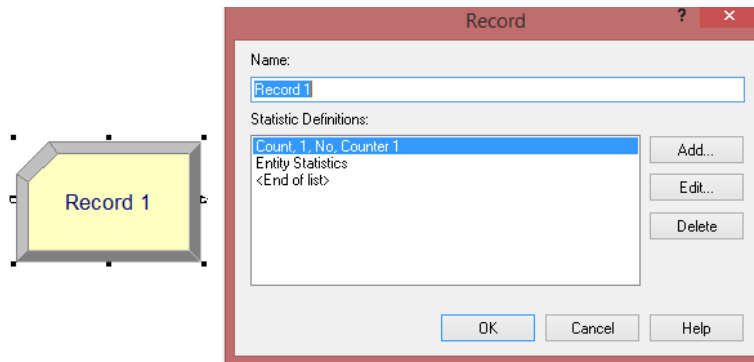


Figura 26. Módulo Record.

Primeros Pasos con Arena

Se comenzará con nuestro primer caso en el software Arena. Se simulará un proceso básico de una caja de un negocio. Para ello se utilizaran 3 módulos: **Create**, **Procces** y **Dispose**.

Ahora se procede a configurar cada módulo. En primer lugar con el módulo Create. Se cambia el nombre del módulo por "*Llegada de Clientes*". El tipo de entidad se denominará "*Clientes*", los tiempos entre llegadas son definidos como "*Rndom (Expo)*" con un valor de 5. La unidad base de tiempo para este módulo será "*minutos*".

Esta configuración se muestra en la Figura #27:

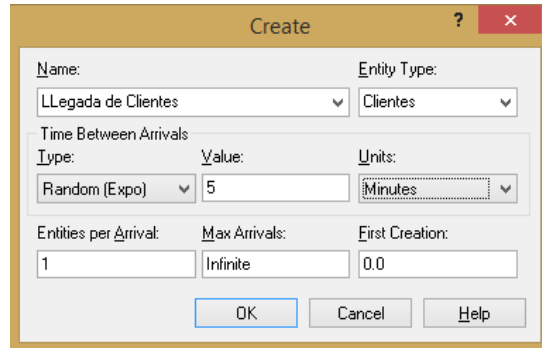


Figura 27. Ejemplo #1 - Módulo Create.

Luego toca configurar el módulo Procces. En dicho módulo, el nombre que se le asignará será “Caja”. Se comportará como “Seize Delay Release”. Se le asignará un recurso denominado “cajera” y su comportamiento será de tipo “triangular” con una duración mínima de 1, media de 3 y máxima de 6. Teniendo como unidad de medida los minutos. Esta configuración está ilustrada en la Figura #28.

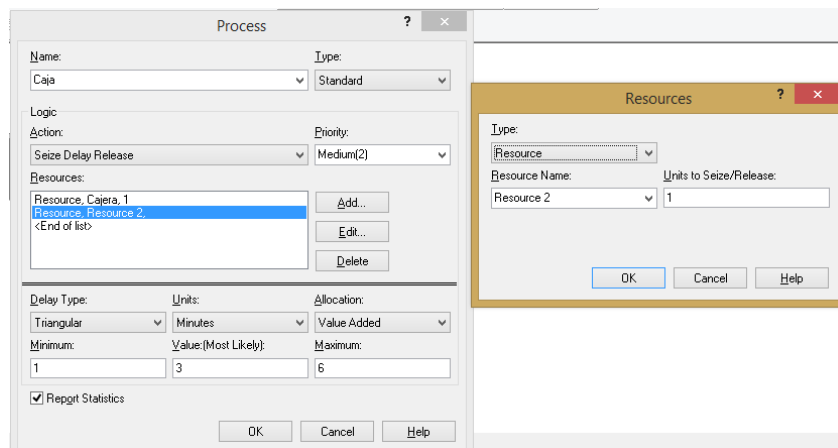


Figura 28. Ejemplo #1 - Módulo Process.

El módulo Dispose representa la salida del sistema, por lo que solo es necesario cambiarle el nombre, como observamos en la Figura #29.

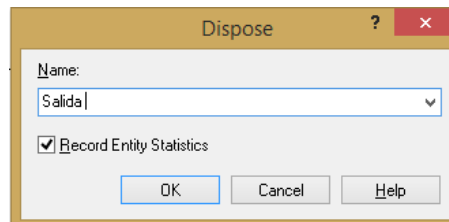


Figura 29. Ejemplo #1 - Módulo Dispose.

El diseño de nuestro sistema queda definido como en la Figura #30.

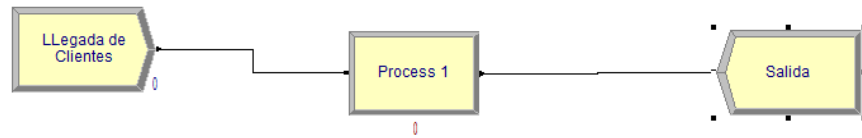


Figura 30. Diagrama del Ejemplo #1.

Es necesario también configurar los parámetros para la ejecución del modelo, por lo que hay que dirigirse al menú “Run” y escoger la opción “Setup”. La configuración de los parámetros se puede ver en la Figura #31:

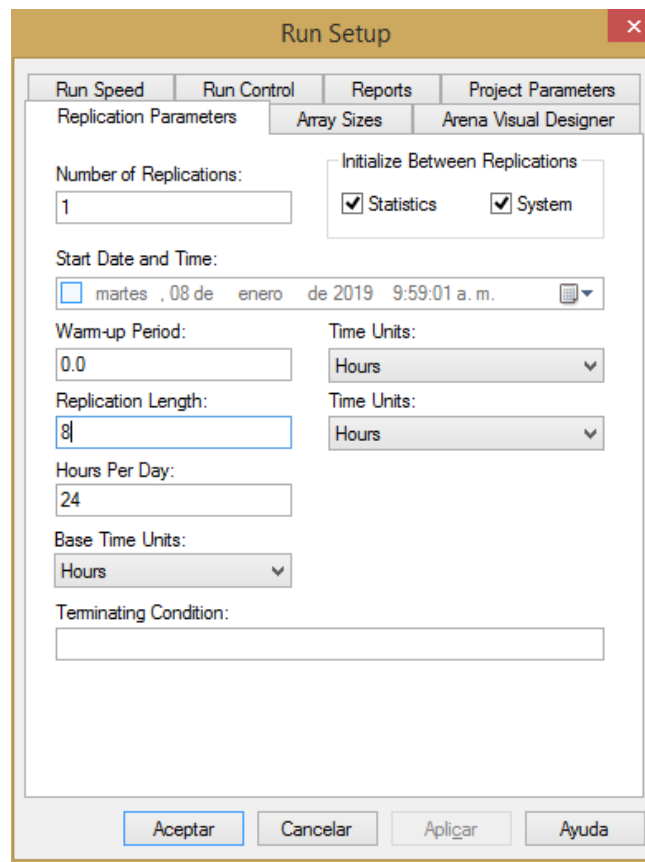


Figura 31. Configuración de parámetros de corrida del Ejemplo #1.

Luego de esto presionamos “Run” o F5 y procedemos a ejecutar la simulación.

Al finalizar la ejecución, se analizan los resultados. Para ello en la barra de proyectos se debe seleccionar el área de Reportes. Dentro de los reportes existen varias secciones con resultados importantes para nuestros análisis, sin embargo los resultados básicos

se encuentran en la sección “*Category by Replication*”, tal como se observa en la Figura #32:

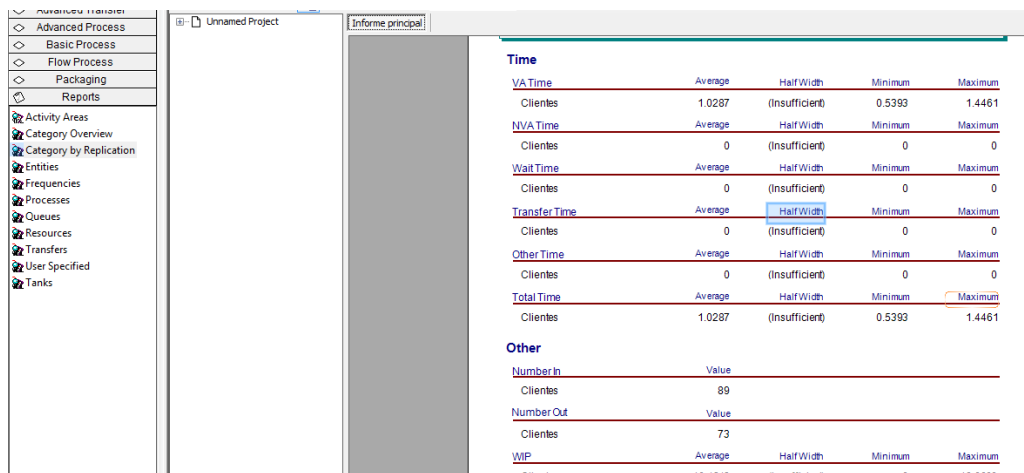


Figura 32. Reportes generados para el Ejemplo #1.

Dentro de estos resultados se puede observar el número de entradas y salidas al sistema, el tiempo de espera en la cola, el tiempo total que los clientes demoran en el sistema, etc. De acuerdo a los parámetros que le configuremos en la ejecución del modelo, se obtiene información más detallada sobre costos de procesos y detalles más precisos sobre las colas.

Proceso con Condicionales

Otra funcionalidad que nos permite Arena es el uso de condicionales. Ya sea de entrada o salida a un proceso, esto permite distribuir en varias vías los procesos para asegurar una mejor simulación.

Ejemplo #2:

En un banco, se tramitan hipotecas. Las estadísticas indican que mensualmente el 88% de las hipotecas tramitadas son aprobadas. Simule el sistema durante 30 días y muestre los resultados.

En primer lugar, configuremos el módulo Create que en nuestro caso lo llamaremos Inicio. Los detalles los observaremos en la Figura #33:

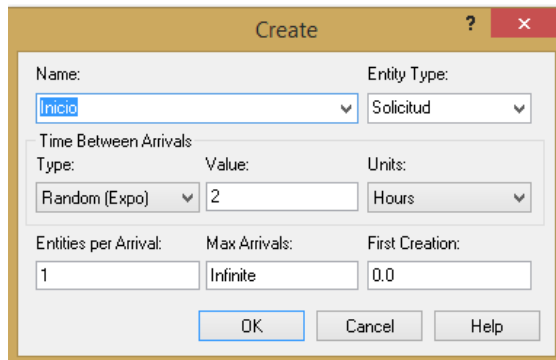


Figura 33. Módulo Create del Ejemplo #2.

Luego utilizaremos un módulo Process, para recrear el proceso de revisión de la hipoteca. Estos detalles serán observados en la Figura #34:

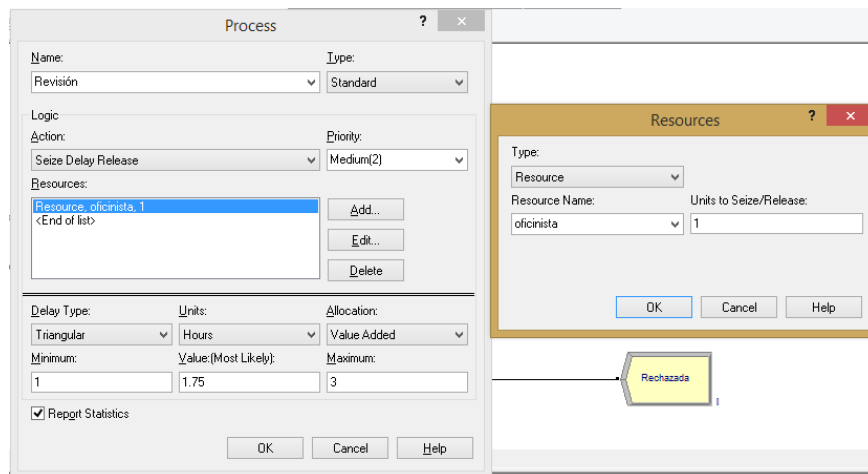


Figura 34. Módulo Process del Ejemplo #2.

Dentro del módulo, utilizaremos un recurso denominado oficinista, el cual representa al empleado encargado de realizar la transacción.

Luego de esto, llegamos al módulo Decide. Este módulo nos permite tomar varias alternativas o condicionales de acuerdo a la necesidad presentada. En el caso, la decisión a tomar es aprobada o no aprobada. En la Figura #35, vemos la configuración de este módulo.

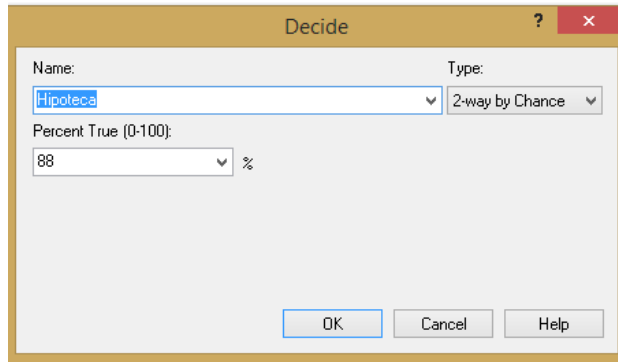


Figura 35. Módulo Decide del Ejemplo 32.

Hemos de notar que este módulo cuenta con 3 elementos. El nombre (que hemos denominado como “Hipoteca”. El tipo, el cual nos permite determinar cuántas alternativas tomaremos. En este caso utilizamos “2-way by Chance”, debido a que solo utilizaremos dos alternativas. Y por último, está el Percent True. Aquí distribuiremos, en base a porcentaje, las alternativas que pueden ponerse. Siempre se declaran n-1 porcentajes. Por ejemplo, en nuestro caso se dice que el 88% de las hipotecas son aprobadas, por lo que se declara en este parámetro 88 y el 12% restante el sistema lo asume. Si fuera una decisión de 4 alternativas. Que la primera tuviera 12%, la segunda 40%, y la tercera 38%, declararíamos estos 3 porcentajes y el 10 % restante el sistema lo asume. Ya que $12+40+38+10 = 100$.

En la figura #36, observamos el modelo completo.

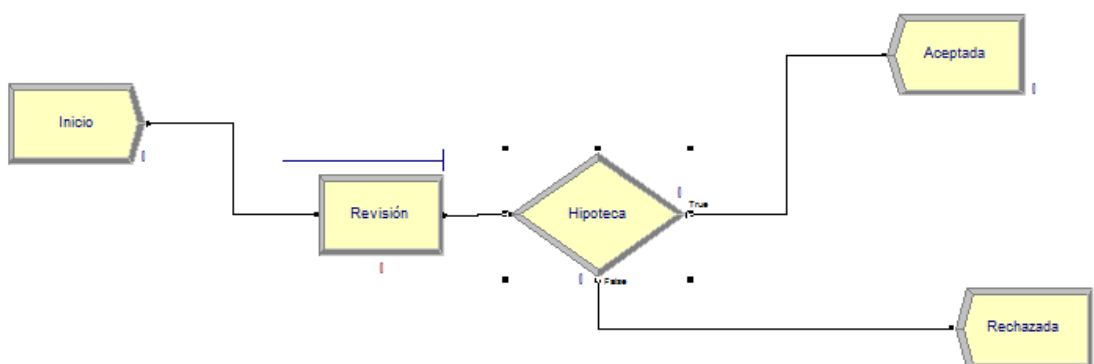


Figura 36. Modelo completo del Ejemplo #2.

Notemos que utilizamos dos vías de salida o Dispose, para atender a cada una de las opciones presentadas. A continuación procedemos a configurar los parámetros de ejecución y correr el programa.

Bibliografía

- Alberto, M., Schwer, I., Cámara, V., & Fumero, Y. (2005). *Matemática Discreta: Con aplicaciones a las Ciencias de la Programación y de la Computación*. Universidad Nacional del Litoral. Ediciones UNL. Retrieved Octubre 14, 2019, from https://books.google.com.pa/books?id=X7qGqkoSDKoC&pg=PA215&dq=Algoritmo+lineal+congruencial&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiTqai0_ZzIAhVwzlkKHaqUDRMQ6AEINjAC#v=onepage&q=Algoritmo lineal congruencial&f=false
- Altarazi, S. A., & Ammouri, M. M. (2018, Diciembre). Concurrent manual-order picking warehouse design: a simulation-based design of experiments approach. *Int. J. Res.*, 56(23), 7103-7121.
- Altioik, T., & Melamed, B. (2007). *Simulation Modeling and Analysis with ARENA*. Elsevier. Retrieved Octubre 28, 2019, from <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=5SezxR5q4mYC&oi=fnd&pg=PR3&dq=arena+simulation&ots=1eZbce3Vno&sig=p9TXuFhjzGel04xa4J7mERftJ2A#v=onepage&q=arena simulation&f=false>
- Arnold, M., & Osorio, F. (n.d.). *Introducción a los Conceptos Básicos de la Teoría General de Sistemas*.
- Bertoglio, O. J. (n.d.). *Introducción a la teoría general de sistemas*. Retrieved Octubre 28, 2019, from <https://books.google.com.pa/books?hl=es&lr=&id=4bVvTLvHVzMC&oi=fnd&pg=PA13&dq=teoria+general+de+sistemas&ots=Rj2-AWoodh&sig=phYiUNnuYqkpMUPKYsS79uA20-c#v=onepage&q=teoria general de sistemas&f=false>.
- C., M. I. (2011). Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: herramienta para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente. *Rev. Univ. EAFIT*, 44(150), 51-63.
- Cao Abad, R. (2002). *Introducción a la Simulación y a la Teoría de Colas*.

- Coss Bu, R. (n.d.). *Simulación: Un Enfoque Práctico*.
- Donoso, P., & Scheller-wolf, A. (2008). Una Introducción a la Teoría De Colas Aplicada a la Gestión de Servicios. *Abante*, 11(2), 93-120.
- Esquerdo, P. J. (2012). *Reglas De Bayes*.
- García Dunna, E., & García Reyes, H. (n.d.). *Simulación y Análisis de Sistemas con Promodel*. Google Libros. Retrieved Octubre 14, 2019, from https://books.google.com.pa/books?id=VuEfwfFr1QMC&pg=PA21&dq=Algoritmo+de+productos+medios&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjRwaum_JzIAhUMj1kKHQMNCPYQ6AEIJjAA#v=onepage&q=Algoritmo de productos medios&f=false
- Glencoe. (n.d.). *Eventos simples*. McGraw-Hill.
- González Ariza, A. L. (2003). *Manual de Investigación de Operaciones*.
- Herrera, M. (n.d.). *Mancilla Herrera.pdf*.
- Illana, J. I. (2013). *Métodos Monte Carlo*. Dep. Física Teórica y del Cosm.
- L. Teoría, e. a. (n.d.). *Simulación de Sistemas Discretos*.
- matematicas10.net. (n.d.). *Matemáticas 10: Ejemplos de Sucesos Aleatorios*. Retrieved Octubre 12, 2019, from Matemáticas10: <https://www.matematicas10.net/2017/02/ejemplos-de-sucesos-aleatorios.html>
- Matsumoto, M., & Nishimura, T. (1998). Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8(1), 3-30.
- Pascal, B., & Andrei, N. (n.d.). *Sucesos y Probabilidades*.
- Rodríguez González, J. M., Abasolo Melchor, A., Carranza García, A. d., De Luna Pérez, N. Y., Hernández Martínez, D. C., & Medrano Meza, E. R. (2011). *UNIDAD II Números Aleatorios y Pseudo aleatorios*.
- Tarifa, E. (1988). *Teoría de modelos y simulación: Introducción a la simulación*. Univ. Nac. Jujuy.

U. Facultad de Ciencias. (n.d.). Probabilidad. 1850(1654), 1-16.

Vieira, A., Dias, L., Pereira, G., & Oliveira, J. (n.d.). Comparison of Simio and Arena Simulation Tools.

Wedelprofesor. (n.d.). *Generación de números aleatorios* (Vol. 1875)

Anexos 1: Pruebas Rápidas



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS



Guía de Actividad #1

(TAREA / PRÁCTICA, LABORATORIOS, ETC.)

FC-FISC-1-8-2016

Facilitador(a): Dr. Carlos Rovetto

Asignatura: Simulación de Sistemas Fecha:.....
Grupo:.....

A. TÍTULO DE LA EXPERIENCIA: Exposición de Softwares de Simulación

B. TEMAS:

Sistemas, características, elementos.

C. OBJETIVO(S):

- El estudiante deberá identificar los diversos elementos de un sistema.
- El estudiante reconocerá las diversas características de un sistema.

D. METODOLOGÍA:

Investigación y Exposición.

E. PROCEDIMIENTO O ENUNCIADO DE LA EXPERIENCIA:

Dados los siguientes ejemplos de sistemas, determine: los elementos de cada sistema e identifique en cada sistema las propiedades mencionadas en la clase.

1. Un aeropuerto.
2. Una universidad
3. Un puerto
4. Una gasolinera.
5. Un supermercado.

F. RECURSOS:

Internet.

G. BIBLIOGRAFIA:

Coss, Raúl. Simulación. Un enfoque práctico. Limusa Noriega Editores.

H. RÚBRICAS:

*Es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones objetivas. Trata del conjunto de criterios y estándares, generalmente relacionados con objetivos de aprendizaje, que se utilizan para evaluar un nivel de desempeño, laboratorios, proyectos, ensayos, artículos y otras tareas. Las rúbricas permiten estandarizar la evaluación de acuerdo con criterios específicos, haciendo la calificación más simple y transparente. **

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Simulación de Sistemas.

Rúbrica para Evaluar Actividad N.-1

Observaciones del Docente: _____

Total de Puntos Obtenidos: _____

| <u>Aspectos a Evaluar</u> | <u>Puntaje Máximo</u> | <u>Puntaje Obtenido</u> |
|--|------------------------------|--------------------------------|
| Identificación correcta de los elementos del sistema | 50 | |
| Identificación correcta de las propiedades del sistema | 50 | |
| Total | 100 | |



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS



Guía de Actividad #2

(TAREA / PRÁCTICA, LABORATORIOS, ETC.)

FC-FISC-1-8-2016

Facilitador(a): Dr. Carlos Rovetto

Asignatura: Simulación de Sistemas Fecha:.....
Grupo:.....

A. **TÍTULO DE LA EXPERIENCIA:** Exposición de Softwares de Simulación

B. TEMAS:

Simulación de Sistemas, Softwares, Paquetes.

C. OBJETIVO(S):

- El estudiante conocerá las diversas alternativas de softwares y paquetes de simulación de Sistemas, junto con las ventajas y desventajas del uso de tales herramientas.

D. METODOLOGÍA:

Investigación y Exposición.

E. PROCEDIMIENTO O ENUNCIADO DE LA EXPERIENCIA:

Realizar en grupo de 3 estudiantes, una investigación y exposición sobre los diversos softwares de Simulación existentes en el mercado. Deberán presentar una exposición en Power Point con el software escogido. Dicha exposición deberá contener los siguientes aspectos:

- a- Características del Lenguaje/Software/Herramienta
- b- Usos más comunes
- c- Ventajas/Desventajas
- d- Otros aspectos Precio; Plataformas; Imágenes de las Pantallas o Ejemplos
- e- Conclusión

La exposición no será superior a los 12 minutos. Todos los miembros deberán sustentar el trabajo.

F. RECURSOS:

Internet.

G. BIBLIOGRAFIA:

Coss, Raúl. Simulación. Un enfoque práctico. Limusa Noriega Editores.

H. RÚBRICAS:

Es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones objetivas. Trata del conjunto de criterios y estándares, generalmente relacionados con objetivos de aprendizaje, que se utilizan para evaluar un nivel de desempeño, laboratorios, proyectos, ensayos, artículos y otras tareas. Las rúbricas permiten estandarizar la evaluación de acuerdo con criterios específicos, haciendo la calificación más simple y transparente. *

Ejemplo de Rúbrica:

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Simulación de Sistemas.
Rúbrica para Evaluar Actividad N.-2

| <u>Aspectos a Evaluar</u> | <u>Puntaje Máximo</u> 100pts | <u>Puntaje Obtenido</u> |
|--|---------------------------------|-------------------------|
| Contenido | 20 | |
| Exposición | 30 | |
| Respuestas a las preguntas del docente y compañeros. | 50 | |
| Total | 100 | |

Observaciones del Docente: _____

Total de Puntos Obtenidos: _____



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ



FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Guía de Actividad #3

(TAREA / PRÁCTICA, LABORATORIOS, ETC.)

FC-FISC-1-8-2016

Facilitador(a): Dr. Carlos Rovetto

Asignatura: Simulación de Sistemas Fecha:.....

Grupo:.....

A. TÍTULO DE LA EXPERIENCIA: Teorema de Bayes

B. TEMAS:

Simulación de Sistemas, probabilidad, teorema de Bayes.

C. OBJETIVO(S):

- El estudiante deberá resolver los problemas propuestos utilizando el teorema de Bayes.

D. METODOLOGÍA:

Resolución de problemas

E. PROCEDIMIENTO O ENUNCIADO DE LA EXPERIENCIA:

- En un despacho de consultoría, 70% del trabajo lo realiza el grupo de administración y el restante 30% el grupo de software. El equipo administrativo tiene 3.5% de errores y el de software 2%. Si un trabajo es tomado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga errores?
- Un moderno edificio tiene dos ascensores para uso de los vecinos. El primero de los ascensores es usado el 65% de las ocasiones, mientras que el segundo es usado el resto de las ocasiones. El uso continuado de los ascensores provoca un 7% de fallos en el primero de los ascensores y un 11% en el segundo. Un día suena la alarma de uno de los ascensores porque ha fallado. Calcula la probabilidad de que haya sido el primero de los ascensores.

F. RECURSOS:

Material suministrado por el docente, recursos de Internet.

G. BIBLIOGRAFIA:

Estuardo Morales, Aaron. Estadística y Probabilidades. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile 2012.

I. RÚBRICAS:

*Es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones objetivas. Trata del conjunto de criterios y estándares, generalmente relacionados con objetivos de aprendizaje, que se utilizan para evaluar un nivel de desempeño, laboratorios, proyectos, ensayos, artículos y otras tareas. Las rúbricas permiten estandarizar la evaluación de acuerdo con criterios específicos, haciendo la calificación más simple y transparente. **

Ejemplo de Rúbrica:

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
 Simulación de Sistemas.

| <u>Aspectos a Evaluar</u> | <u>Puntaje Máximo</u> 100pts | <u>Puntaje Obtenido</u> |
|---------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| Problema #1 | 50 | |
| Problema #2 | 50 | |
| Total | 100 | |

Rúbrica para Evaluar Actividad N.-3

Observaciones del Docente: _____

Total de Puntos Obtenidos: _____



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Guía de Actividad #4

(TAREA / PRÁCTICA, LABORATORIOS, ETC.)

FC-FISC-1-8-2016

Facilitador(a): Dr. Carlos Rovetto

Asignatura: Simulación de Sistemas Fecha:.....

Grupo:.....

A. **TÍTULO DE LA EXPERIENCIA:** Probabilidad

B. **TEMAS:**

Probabilidad, distribuciones, variables continuas y discretas.

C. **OBJETIVO(S):**

- El estudiante deberá resolver los problemas propuestos utilizando las diversas distribuciones de probabilidad.

D. **METODOLOGÍA:**

Resolución de problemas

E. **PROCEDIMIENTO O ENUNCIADO DE LA EXPERIENCIA:**

- Calcular la probabilidad de que al lanzar 2 dados salga 3, 8 ó 9. Además calcular la probabilidad de que caiga un número mayor a 9.
- Calcule la esperanza, o sea, cuántas caras podemos esperar en el lanzamiento de 2 monedas.
- Una moneda cargada tal que la probabilidad de que caiga cara es de $2/3$ y de que caiga sello es de $1/3$. Se lanza una moneda 3 veces. Sea x una v.a. que designa el total de cara que se obtienen. Construir una tabla que muestre la distribución de probabilidad de x , y calcular la desviación estándar.

F. **RECURSOS:**

Material suministrado por el docente, recursos de Internet.

G. **BIBLIOGRAFIA:**

Estuardo Morales, Aaron. *Estadística y Probabilidades*. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile 2012.

H. RÚBRICAS:

Es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones objetivas. Trata del conjunto de criterios y estándares, generalmente relacionados con objetivos de aprendizaje, que se utilizan para evaluar un nivel de desempeño, laboratorios, proyectos, ensayos, artículos y otras tareas. Las rúbricas permiten estandarizar la evaluación de acuerdo con criterios específicos, haciendo la calificación más simple y transparente. *

Ejemplo de Rúbrica:

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Simulación de Sistemas.

Rúbrica para Evaluar Actividad N.-4

| <u>Aspectos a Evaluar</u> | <u>Puntaje Máximo</u> | <u>Puntaje Obtenido</u> |
|----------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| Problema #1 | 25 | |
| Problema #2 | 25 | |
| Problema #3 | 50 | |
| Total | 100 | |

Observaciones del Docente: _____

Total de Puntos Obtenidos: _____



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS



Guía de Actividad #5

(TAREA / PRÁCTICA, LABORATORIOS, ETC.)

FC-FISC-1-8-2016

Facilitador(a): Dr. Carlos Rovetto

Asignatura: Simulación de Sistemas Fecha:.....
Grupo:.....

A. TÍTULO DE LA EXPERIENCIA: Teoría de Colas

B. TEMAS:

Teoría de colas.

C. OBJETIVO(S):

- El estudiante deberá investigar algunos conceptos teóricos relacionados con la teoría de colas.

D. METODOLOGÍA:

Resolución de problemas

E. PROCEDIMIENTO O ENUNCIADO DE LA EXPERIENCIA:

Investigar los siguientes puntos:

- Historia de la teoría de colas
- Elementos existentes en un modelo de colas.
- Notación Kendall
- Disciplinas de Colas
- FIFO/LIFO/SIRO/PRI/Disciplina de retiro

F. RECURSOS:

Material suministrado por el docente, recursos de Internet.

G. RÚBRICAS:

*Es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones objetivas. Trata del conjunto de criterios y estándares, generalmente relacionados con objetivos de aprendizaje, que se utilizan para evaluar un nivel de desempeño, laboratorios, proyectos, ensayos, artículos y otras tareas. Las rúbricas permiten estandarizar la evaluación de acuerdo con criterios específicos, haciendo la calificación más simple y transparente. **

Ejemplo de Rúbrica:

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Simulación de Sistemas.
Rúbrica para Evaluar Actividad N.-5

| <u>Aspectos a Evaluar</u> | <u>Puntaje Máximo</u> | <u>Puntaje Obtenido</u> |
|----------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| Pregunta #1 | 20 | |
| Pregunta #2 | 20 | |
| Pregunta #3 | 20 | |
| Pregunta #4 | 20 | |
| Pregunta #5 | 20 | |
| Total | 100 | |

Observaciones del Docente: _____

Total de Puntos Obtenidos: _____

cliente pasa en el estacionamiento del banco, (incluyendo el tiempo de servicio)? d. ¿Cuál es el promedio de clientes que el cajero atenderá por hora?

E. RECURSOS:

Material suministrado por el docente, recursos de Internet.

F. RÚBRICAS:

*Es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones objetivas. Trata del conjunto de criterios y estándares, generalmente relacionados con objetivos de aprendizaje, que se utilizan para evaluar un nivel de desempeño, laboratorios, proyectos, ensayos, artículos y otras tareas. Las rúbricas permiten estandarizar la evaluación de acuerdo con criterios específicos, haciendo la calificación más simple y transparente. **

Ejemplo de Rúbrica:

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Simulación de Sistemas.
Rúbrica para Evaluar Actividad N.-6

| <u>Aspectos a Evaluar</u> | <u>Puntaje Máximo</u> | <u>Puntaje Obtenido</u> |
|---------------------------|-----------------------|-------------------------|
| Problema #1 | 20 | |
| Problema #2 | 30 | |
| Total | 50 | |

Observaciones del Docente: _____

Total de Puntos Obtenidos: _____



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Guía de Actividad #7
(TAREA / PRÁCTICA, LABORATORIOS, ETC.)

FC-FISC-1-8-2016

Facilitador(a): Dr. Carlos Rovetto

Asignatura: Simulación de Sistemas Fecha:.....

Grupo:.....

A. TÍTULO DE LA EXPERIENCIA: Teorema de Montecarlo

B. TEMAS:

Teorema de Montecarlo

C. OBJETIVO(S):

- Utilizar el software Excel para recrear el modelo de Montecarlo.

D. METODOLOGÍA:

Resolución de problemas

E. PROCEDIMIENTO O ENUNCIADO DE LA EXPERIENCIA:

Un vendedor de periódicos trata de aumentar sus ganancias. El número de periódicos que vende cada día es una variable aleatoria, sin embargo el análisis de los datos del mes pasado muestra la distribución de demanda diaria. Un periódico le cuesta \$2.00, y este los vende en \$3.00. Los periódicos que no se venden los regresa a la editorial y recibe \$1.00 Para toda la demanda no satisfecha se estima un costo de \$1.00 en clientela y ganancia perdida. Si la política es pedir una cantidad igual a la demanda del día anterior, determine la ganancia diaria promedio del vendedor mediante la simulación de este sistema.

Suponga que la demanda del día anterior fue de 20 unidades. Determine la ganancia promedio si se simulan 7 días de la semana.

| Demanda por día | Probabilidad |
|-----------------|--------------|
| 30 | 0.5 |
| 31 | 0.15 |
| 32 | 0.22 |
| 33 | 0.38 |
| 34 | 0.14 |
| 35 | 0.6 |

F. RECURSOS:

Material suministrado por el docente, recursos de Internet.

G. RÚBRICAS:

*Es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones objetivas. Trata del conjunto de criterios y estándares, generalmente relacionados con objetivos de aprendizaje, que se utilizan para evaluar un nivel de desempeño, laboratorios, proyectos, ensayos, artículos y otras tareas. Las rúbricas permiten estandarizar la evaluación de acuerdo con criterios específicos, haciendo la calificación más simple y transparente. **

Ejemplo de Rúbrica:

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Simulación de Sistemas.

Rúbrica para Evaluar Actividad N.-7

| <u>Aspectos a Evaluar</u> | <u>Puntaje Máximo</u> | <u>Puntaje Obtenido</u> |
|---------------------------|-----------------------|-------------------------|
| Problema #1 | 50 | |
| Total | 50 | |

Observaciones del Docente: _____

Total de Puntos Obtenidos: _____



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS



Guía de Actividad #8

(TAREA / PRÁCTICA, LABORATORIOS, ETC.)

FC-FISC-1-8-2016

Facilitador(a): Dr. Carlos Rovetto

Asignatura: Simulación de Sistemas Fecha:.....
Grupo:.....

A. TÍTULO DE LA EXPERIENCIA: Primeros Pasos en Arena

B. TEMAS:

Simulación

C. OBJETIVO(S):

- Utilizar el software Arena para crear modelos de simulación.

D. METODOLOGÍA:

Aplicación en Software

E. PROCEDIMIENTO O ENUNCIADO DE LA EXPERIENCIA:

Una farmacia muy concurrida cuenta con 4 dependientes para la atención de los clientes. Se estima que llegan 46 clientes/hora siguiendo una distribución de Poisson. El tiempo de servicio es exponencial con media de 2 minutos/clientes. Simule el sistema por un turno de 12 horas y calcule.

- a. Tiempo de utilización de los dependientes.
- b. El tiempo promedio de espera en la fila.

F. RECURSOS:

Material suministrado por el docente, recursos de Internet.

G. RÚBRICAS:

*Es una herramienta de calificación utilizada para realizar evaluaciones objetivas. Trata del conjunto de criterios y estándares, generalmente relacionados con objetivos de aprendizaje, que se utilizan para evaluar un nivel de desempeño, laboratorios, proyectos, ensayos, artículos y otras tareas. Las rúbricas permiten estandarizar la evaluación de acuerdo con criterios específicos, haciendo la calificación más simple y transparente. **

Ejemplo de Rúbrica:

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Simulación de Sistemas.
Rúbrica para Evaluar Actividad N.-8

| <u>Aspectos a Evaluar</u> | <u>Puntaje Máximo</u> | <u>Puntaje Obtenido</u> |
|----------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| | 50pts | |
| Problema #1 | 50 | |
| Total | 50 | |

Observaciones del Docente: _____

Total de Puntos Obtenidos: _____

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #1

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto

Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Cierto (C) y falso (F).

1. ____ La entropía es la tendencia que tienen los sistemas a desorganizarse con el paso del tiempo.
2. ____ Los elementos son todas las partes u objetos que constituyen un sistema.
3. ____ El entorno de un sistema hace referencia a la organización interna que este posee.
4. ____ Un sistema discreto es aquel en el que las relaciones funcionales sólo permiten que el estado varíe en un conjunto finito de puntos temporales.
5. ____ Un sistema determinístico es aquel que tiene una conducta aleatoria.
6. ____ Un sistema estocástico es aquel que no contiene ningún elemento aleatorio.
7. ____ Un evento es un fenómeno que ocurre en un instante de tiempo y que cambia el estado del sistema.
8. ____ El estado de un sistema es la descripción de los atributos de las entidades y actividades en un instante de tiempo dado.

II Parte. Desarrollo.

1. ¿Qué es un sistema?
2. Mencione los cinco elementos que componen un sistema.

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #2

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto

Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Llene los espacios.

1. Dos factores que se deben considerar en el desarrollo de un modelo de simulación son: _____ y _____.

2. Una simulación puede ser de dos tipos: _____ y _____.

3. El proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema y conducir experimentos con este con el fin de comprender su comportamiento, se denomina: _____.

4. Mencione tres ámbitos profesionales en los que se puede utilizar la simulación: _____, _____ y _____.

5. Dos softwares de simulación general son: _____ y _____.

6. La simulación orientada al _____ es un enfoque de la simulación discreta.

II Parte. Desarrollo.

1. ¿Qué es un modelo?

2. Mencione una ventaja y una desventaja de la simulación.

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #3

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto

Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Cierto (C) y falso (F).

1. ____ De acuerdo con su naturaleza, los sistemas solamente se clasifican en discretos y continuos.
2. ____ La simulación orientada al proceso se centra en la programación de eventos.
3. ____ La selección de un lenguaje de programación depende solamente del alcance del proyecto de simulación.
4. ____ Una simulación continua es aquella en la que los cambios en el estado del modelo ocurren cada cierto intervalo de tiempo.
5. ____ Un aspecto a considerar para el correcto desarrollo de un modelo es el tamaño de la muestra.
6. ____ Las maquetas son ejemplos de modelos físicos.
7. ____ Una desventaja de la simulación es que el desarrollo de un modelo puede ser costoso y lento.
8. ____ Los modelos son una abstracción de la realidad.
9. ____ Una desventaja de los softwares de simulación general es que requiere de un entrenamiento adicional para su uso.
10. ____ Dos softwares de simulación general son GPSS y SIMULA.

II Parte. Desarrollo.

1. Describa qué es una simulación.

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #4

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto

Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Cierto (C) y falso (F).

1. ____ La esperanza matemática también se denomina valor esperado.
2. ____ El teorema de Bayes se utiliza para revisar probabilidades calculadas cuando no se posee nueva información.
3. ____ El espacio muestral es un conjunto cuyos elementos representan todos los resultados posibles de un experimento.
4. ____ Las variables cualitativas pueden expresarse numéricamente.
5. ____ Una operación entre eventos puede ser la intersección de eventos.
6. ____ Una función de probabilidad es la relación entre cada posible resultado y la probabilidad que tiene cada uno.
7. ____ Un experimento es cualquier proceso que proporciona datos.
8. ____ La representación de los valores y sus probabilidades se denomina función de masa.
9. ____ Las variables son las características que se pueden encontrar en una población.
10. ____ Un experimento determinista es aquel en el que no se puede predecir el resultado.

II Parte. Desarrollo.

1. ¿Qué es la probabilidad?
2. Mencione tres áreas en las que se aplica la teoría de la probabilidad.

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #5

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Llene los espacios.

1. El Teorema de Bayes se utiliza para calcular probabilidades que según la información obtenida pueden ser: _____ y _____.
2. A la sumatoria de las probabilidades de que exista un suceso aleatorio, multiplicado por el valor del suceso aleatorio, se le denomina: _____.
3. Mencione dos tipos de distribuciones: _____ y _____.
4. Tipo de probabilidad en la que se representa la probabilidad del suceso B una vez ocurrido el suceso A: _____.
5. Nombre de la regla que establece que la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento en particular es igual a la suma de las probabilidades individuales, si es que los eventos son mutuamente excluyentes: _____.
6. Considerando la fórmula para el cálculo de probabilidad dada por $P = \frac{NCF}{NCP}$, indique qué representa:
 - a) NCF : _____
 - b) NCP : _____

II Parte. Desarrollo.

1. ¿Qué es la función de probabilidad?
2. Describa los elementos del teorema de Bayes.

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}{P(B)}$$

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #6

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto

Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Llene los espacios.

1. Mencione tres tipos de tests para números aleatorios:
_____, _____ y
_____.

2. Los métodos para la generación de números aleatorios se agrupan en algoritmos:
_____ y _____.

3. Las dos propiedades fundamentales de los números aleatorios son:
_____ y _____.

4. Mencione tres requisitos que deben cumplir los números pseudoaleatorios:
_____, _____ y
_____.

5. Mencione un ejemplo de fenómeno estrictamente aleatorio:
_____.

II Parte. Desarrollo.

1. ¿Qué son números pseudoaleatorios?

2. Mencione dos problemáticas de la generación de números pseudoaleatorios.

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #7

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Cierto (C) y falso (F). números aleatorios y colas

1. ____ Una problemática de la generación de números pseudoaleatorios es que puede existir autocorrelación entre números.
2. ____ .Uno de los tipos de costos en un sistema de colas es el costo de servicio.
3. ____ La distribución exponencial depende de la capacidad de la cola.
4. ____ En el modelo M/G/1 se presenta un servidor con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales.
5. ____ La simulación de Montecarlo imita el comportamiento aleatorio de sistemas reales dinámicos.
6. ____ Uno de los factores que se busca conocer al evaluar el desempeño de una cola es el número de clientes que esperan en la cola.
7. ____ El uso de semillas en la generación de números pseudoaleatorios asegura que se cumpla el requisito de replicabilidad.
8. ____ Los métodos para la generación de números aleatorios se agrupan en algoritmos congruenciales y no congruenciales.
9. ____ En el modelo $M/E_k/1$ se presentan varios servidores con llegadas exponenciales.
10. ____ La aleatoriedad se utiliza con el fin de simplificar el modelo de la simulación.

II Parte. Desarrollo.

1. Mencione tres claves que caracterizan al método de Montecarlo.
2. Mencione dos ejemplos de tests para números aleatorios.

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #8

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto

Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Llene los espacios.

1. Mencione dos elementos que describen un sistema de colas:
_____ y _____.
2. Dos tipos de costos que se pueden encontrar en un sistema de colas son:
_____ y _____.
3. A todo individuo que solicita el servicio en un sistema de colas se le denomina:
_____.
4. Al procedimiento por el cual se da el servicio que los clientes solicitan se denomina:
_____.
5. El modo en el que los clientes son seleccionados para ser servidos se denomina:
_____.
6. Al número máximo de clientes que puede estar en una cola se le denomina:
_____.
7. Los dos tipos de distribución de probabilidad de los tiempos entre llegadas en un sistema de colas son: _____ y _____.

II Parte. Desarrollo.

1. ¿Qué es la teoría de colas?
2. Mencione tres campos en los que se aplica el método de Montecarlo.

Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales
Modelado y Simulación de Sistemas

Prueba #9

Nombre: _____ Cédula: _____ Grupo: _____

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto

Puntos Obtenidos: _____ /

I Parte. Llene los espacios.

1. La ventana principal del software de simulación ARENA, presenta tres regiones que son: _____, _____ y _____.

2. En el software de simulación ARENA, las variables pueden ser de dos tipos: _____ y _____.

3. Mencione tres tipos de procesamiento que son posibles dentro del módulo Process: _____, _____ y _____.

4. Una _____ representa un periodo de tiempo de duración específica.

5. Una _____ es un objeto de interés que pertenece al sistema.

6. A la propiedad de una entidad se le denomina _____.

7. Un _____ es un elemento utilizado para modelar un área donde hay una restricción.

II Parte. Desarrollo.

1. Mencione los tres módulos básicos del software de simulación ARENA.

Anexo 2: Presentaciones

Modelado y Simulación de Sistemas

Dr. Carlos A. Rovetto

1

Capítulo I: Introducción a la Simulación de Sistemas

2

Capítulo I: Introducción a la Simulación de Sistemas

- Para definir el concepto de simulación de sistemas de forma correcta, se debe primero dejar claro el concepto de sistemas. Sistemas puede definirse como *“un conjunto de cosas que ordenadamente relacionadas entre sí contribuyen a determinado objeto”* (L. Teoría).
- Partiendo de esta premisa, encontramos en un sistema a varios elementos contribuyendo para una causa en común.

3

Características de los Sistemas

Entre las características de los sistemas, se pueden resaltar:

- **Elementos:** Los elementos hacen referencias a todas las partes u objetos que constituyen un sistema
- **Interacción:** Existe toda una distribución de relaciones entre los elementos de un sistema. Ningún objeto de un sistema se encuentra aislado.
- **Estructura:** Los sistemas poseen una organización interna. Los elementos se rigen por una serie de jerarquías y relaciones que le dan estabilidad al sistema y que garantiza el cumplimiento de los objetivos comunes.
- **Entorno:** Un sistema nunca puede estar aislado. El forma parte de otro sistema mayor magnitud o se relaciona directa e indirectamente con otros sistemas.
- **Entropía:** Los sistemas tienden a desorganizarse con el paso del tiempo.

4

Clasificación de sistemas

De acuerdo a su naturaleza, un sistema puede ser (Tarifa, 1988):

- **Determinístico:** Si el sistema no contiene ningún elemento aleatorio es un sistema determinístico.
- **Estocástico:** En este caso algún elemento del sistema tiene una conducta aleatoria. Entonces, para entradas conocidas no es posible asegurar los valores de salida.
- **Continuo:** Se tiene un sistema continuo cuando las relaciones funcionales entre las variables del sistema sólo permiten que el estado evolucione en el tiempo en forma continua (basta que una variable evolucione continuamente).
- **Discreto:** Se tiene un sistema discreto cuando las relaciones funcionales del sistema sólo permiten que el estado varíe en un conjunto finito (contable) de puntos temporales.

5

Todo sistema está compuesto por elementos bien determinados:

- **Entidad:** Una parte u objeto de interés en un sistema.
- **Atributo:** Una propiedad de una entidad.
- **Actividad:** Proceso que requiere de un intervalo de tiempo finito para su realización.
- **Estado:** Descripción de todos los atributos de todas las entidades y todas las actividades de un sistema en un instante de tiempo dado.
- **Evento:** Fenómeno que ocurre en un instante de tiempo y que cambia el estado del sistema.

Elementos de un sistema

6

Definición de modelo

Modelo se define como la abstracción de un sistema. Es decir, dentro de un modelo, vamos plasmando el comportamiento de un sistema de una manera netamente matemática, y tomando en cuenta todos los actores y variables de dicho sistema. Algunas ideas a tener en consideración a la hora de trabajar con modelos:

- Los modelos son una abstracción de la realidad. Esta representación a entender cómo funciona el objeto de estudio.
- Los modelos son una construcción intelectual y descriptiva de un objeto (entidad) en la cual recae un interés de parte de un observador.

Existen variados tipos de modelo, tales como:

- **Físico:** (Maquetas, prototipos, plantas ...)
- **Matemático:** (Modelos de colas analíticas, programas lineales, simulación)

7

Definición de Simulación

Aclarados estos conceptos podemos pasar a definir simulación. Según estudiosos del tema, como Robert E Shannon, simulación se puede definir como: "el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales se puede operar el sistema" (Coss Bu).

Naturalez Experimental

El principal propósito de la simulación es recrear diversos estados de un sistema o proceso que en la práctica serían muy difíciles de implementar, o que en casos de poderse implementar, podrían comprometer las operaciones generales del sistema.

8

Ejemplos de estudios de sistemas

- **Simulación de vuelos:** Los pilotos de las aerolíneas comerciales, así como los pilotos militares utilizan diferentes paquetes de software que los ayudan a ganar experiencia con los equipos antes de realizar vuelos reales.
- **Industria petrolera:** Empresas como e-Tech Simulation ofrecen equipos de entrenamiento basados en escenarios para la industria de ingeniería de petróleos, con el objetivo de mejorar la capacidad de los trabajadores para identificar y mitigar riesgos de manera segura y efectiva, ofreciendo diferentes niveles de entrenamiento para operadores de campo, como también al personal con experiencia en gerencia y operaciones.
- **Industria financiera:** Se utiliza la simulación para las proyecciones referentes a estimaciones, costos, tendencias para una identificación de escenarios d riesgos, rentabilidad de mercado que ayude a los economistas a tomar decisiones acertadas.

9

Ventajas y desventajas de la simulación

Ventajas:

- Permite ahorrar costos al no tener que adquirir equipos o softwares que realicen la actividad que se desea simular.
- Evita tener que interrumpir o alterar la usabilidad del sistema con la implementación de los cambios
- Pueden establecerse condiciones tanto de éxito como de fracaso en el análisis del sistema, que serían totalmente inviables representar en la realidad.
- La simulación puede utilizarse como medio de capacitación para el personal de las empresas.

Desventajas:

- El desarrollo de un modelo puede ser costoso, laborioso y lento.
- Existe la posibilidad de cometer errores. No se debe olvidar que la experimentación se lleva a cabo con un modelo y no con el sistema real; entonces, si el modelo está mal o se cometen errores en su manejo, los resultados también serán incorrectos.
- No se puede conocer el grado de imprecisión de los resultados. Por lo general el
- modelo se utiliza para experimentar situaciones nunca planteadas en el sistema real, por lo tanto no existe información previa para estimar el grado de correspondencia entre la respuesta del modelo y la del sistema real.

10

Factores a considerar en el desarrollo del modelo de simulación

Es preciso aclarar, que para un correcto análisis de los resultados de la simulación, se requiere una base fuerte en estadística y probabilidad, por lo que en los siguientes capítulos estaremos presentado algunos temas que nos ayuden a profundizar en estos análisis.

Mientras tanto, presentaremos algunos aspectos importantes para un correcto desarrollo de un modelo (Coss Bu):

- Generación de variables aleatorias no-uniformes: esto puede obtenerse si se cuenta con un generador de números uniformes y una función que transforme estos números en valores de distribución de probabilidad deseada.
- Lenguaje de programación: de acuerdo al tipo de análisis y alcance del proyecto de simulación, podemos decidir que lenguaje o paquete de simulación debemos utilizar.
- Condiciones iniciales: deben determinarse las condiciones iniciales correctas de un sistema en estado estable.
- Tamaño de la muestra: la selección de un tamaño de muestra apropiado que asegure un nivel deseado de precisión y a la vez minimice el costo de operación del modelo.

11

Pasos para realizar un proyecto de simulación

Definir un objetivo alcanzable

Prepare una mezcla completa de las habilidades en el equipo

Involucrar al usuario final

Elegir las herramientas de simulación adecuados

Modelar el nivel apropiado de detalles

Obtener los datos de entrada necesarios

Proporcionar la documentación adecuada

Desarrollar un plan para la verificación de los modelos adecuados.

Desarrollar un plan para la validación del modelo.

Desarrollar un plan para el análisis de la producción estadística.

12

Clasificación de los lenguajes

Al momento de realizar un proyecto de simulación, se puede optar por dos alternativas en cuanto al lenguaje a utilizar: lo primero sería desarrollar un propio software que se ajuste al propósito y especificación de nuestro proyecto, y por otro lado, la utilización de un software ya existente. Definitivamente, la segunda opción es la más utilizada debido a la complejidad de la creación de un software, sin embargo en ocasiones estos softwares comerciales conllevan una pronunciada curva de aprendizaje.

Se pueden utilizar lenguajes de propósito general para nuestras simulaciones tomando en cuenta las siguientes consideraciones, en el siguiente slide

13

Ventajas:

- Poco o ningún costo de software adicional.
- Universalmente disponibles.
- Sin necesidad de formación adicional.

Desventajas:

- Cada modelo se inicia desde cero.
- Muy poco de código reutilizable.
- Largo ciclo de desarrollo de cada modelo.
- Fase de verificación difícil.

- Ejemplos: C, C++, Visual Basic, Java

Softwares de Simulación General:

Ventajas:

- Características estandarizadas a menudo necesarios en la modelización
- Ciclo de desarrollo más corto para cada modelo
- Gran asistencia en la verificación de los modelos
- Código de lectura fácil

Desventajas:

- Mayor costo del software (por adelantado)
- Entrenamiento adicional requerido
- Portabilidad limitada

- Ejemplo: GPSS, SIMSCRIPT II.5, ModSim III, SIMULA

14

Tipos de Simulación

- **Continua:** En que el estado del modelo cambia constantemente en el tiempo. Ejemplo: sistemas físicos, dinámica de poblaciones, modelos económicos. En la Figura #2, mostramos un ejemplo de simulación de un sistema Continuo:
- **Discreta:** En que los cambios de estado en el modelo ocurren cada cierto intervalo de tiempo: Ejemplos: cola de espera, ordenamiento de tareas. Existen dos enfoques de simulación discreta:
 - **Simulación orientada al proceso:** Consiste en desarrollar un Diagrama de Bloques, en donde cada bloque representa una actividad relacionada con el "Cliente", a medida que éste transita por el sistema, como podemos observar en la Figura #3.
 - **Simulación orientada al evento:** Se centra en la programación de eventos que cambian el estado del sistema a simular, creando una "Lista de Eventos"

15

Capítulo II: Introducción al uso de probabilidades

16

Capítulo II: Introducción al uso de probabilidades

La probabilidad es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. (U. Facultad de Ciencias)

Apegándonos a esta definición, podemos encontrar el papel fundamental de la probabilidad dentro de un proyecto de simulación, ya que con la simulación pretendemos conocer diversos escenarios y la probabilidad de su ocurrencia dentro de un escenario real.

Por ello, antes de comenzar a trabajar con algunos procedimientos estadísticos, brindaremos definiciones acerca de algunos conceptos básicos de estadísticas.

17

Conceptos básicos

Experimento: Un experimento, en estadística, es cualquier proceso que proporciona datos, numéricos o no numéricos. Puede ser de dos tipos:

- Los experimentos (o fenómenos) aleatorios son aquellos en los que NO se puede predecir el resultado.
- Si se puede predecir el resultado, es un experimento determinista.

Ejemplos:

- Lanzar una moneda es un experimento aleatorio ya que no es posible predecir el resultado de si sale cara o sello.
- El sorteo de la lotería es un experimento aleatorio ya que no se sabe que balota será extraída del ánfora.
- Calentar el agua es un experimento determinista

18

- **Espacio Muestral:** Un conjunto cuyos elementos representan todos los posibles resultados de un experimento. El espacio muestral de un experimento siempre existe y no es necesariamente único pues, dependiendo de nuestra valoración de los resultados, podemos construir diferentes espacios muestrales. (Herrera)
- **Evento aleatorio simple:** Subconjunto del espacio muestral formado por un único elemento (Glencoe).
- **Evento aleatorio:** Es un subconjunto de un espacio muestral, es decir, un conjunto de posibles resultados que se pueden dar en un experimento aleatorio. (matematicas10.net, s.f.)
- **Complemento:** El complemento de un evento A se representa por \bar{A} y es el evento que contiene todos los elementos que no están en A. El evento \bar{A} ocurre si A no ocurre.
- **Operaciones entre eventos:** Unión de eventos, Intersección de eventos y Complemento.

19

- **Variable:** Son las características que podemos encontrar en una población.
El dominio de una variable es el conjunto de las distintas modalidades o valores que puede tomar.
De acuerdo al tipo de datos que representan, se utiliza el término "modalidad" cuando hablamos de caracteres cualitativos y el término "valor" cuando estudiamos caracteres cuantitativos.
- **Variables cualitativas:** Las que no aparecen en forma numérica, sino como categorías o atributos (sexo, profesión, color). Es decir, describe una cualidad, no una cantidad numérica. Las variables cualitativas sólo pueden ser nominales u ordinales.
- **Variables cuantitativas:** Las que pueden expresarse numéricamente (temperatura, salario, número de goles en un partido, edad, etc). Se pueden cuantificar los resultados experimentales por medio de instrumentos adoptando unidades de medida para valorar los diferentes resultados. Pueden ser discretas o continuas.
- **Variables discretas:** Por ejemplo, en un grupo determinado de 5 niños, el número de quienes recibieron cuando menos un juguete electrónico en Navidad sería 0, 1, 2, 3, 4 ó 5. No puede haber un número entre estos valores, como 2.338.
- **Variable continua:** La temperatura exacta afuera del salón mientras se desarrolla la clase puede ser: 3.114, 19.872, o 28.333 grados centígrados, o cualquiera de una infinidad de otros valores en el intervalo de temperaturas donde se ubica la escuela.
- **Función:** En matemáticas es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. Correspondencia o relación f de los elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto B; Los valores que tomará una variable dependiendo del valor de otra.

20

Teoría de probabilidad

La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, las ciencias y la filosofía para sacar conclusiones sobre la probabilidad discreta de sucesos potenciales y la mecánica subyacente discreta de sistemas complejos.

El cálculo de la probabilidad se realiza siguiendo la clásica formulación de Pascal:

$$P = \frac{NCF}{NCP}$$

Donde NCF representa : Número de casos favorables y NCP: Número de casos Posibles.

21

Axiomas de la probabilidad

En todo espacio de probabilidad deben cumplirse los siguientes axiomas:

Si Ω es el espacio muestral de un determinado experimento aleatorio, $P(\Omega) = 1$

Ω : Es suceso seguro

Si A es un suceso perteneciente a un determinado experimento.

Entonces: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Dado un espacio muestral finito y una sucesión de sucesos A_1, A_2, \dots, A_n mutuamente excluyente, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

22

Regla General de la Adición

La regla de la adición o regla de la suma establece que la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento en particular es igual a la suma de las probabilidades individuales, si es que los eventos son mutuamente excluyentes, es decir, que dos no pueden ocurrir al mismo tiempo.

$P(A \text{ o } B) = P(A) \cup P(B) = P(A) + P(B)$ si A y B son mutuamente excluyente.

$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$ si A y B son no excluyentes.

Siendo: $P(A)$ = probabilidad de ocurrencia del evento A. $P(B)$ = probabilidad de ocurrencia del evento B. $P(A \text{ y } B)$ = probabilidad de ocurrencia simultánea de los eventos A y B. (Pascal & Andrei)

23

Probabilidad Condicional

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral E. Se llama probabilidad del suceso B condicionado a A y se representa por $P(B/A)$ a la probabilidad del suceso B una vez ocurrido el suceso A.

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

24

Teorema de Multiplicación

Teniendo en cuenta la definición de la probabilidad condicionada:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

El teorema de la multiplicación viene dado por:

$$P = (A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

25

Independencia de Sucesos

Desde un punto de vista formal, se puede decir que A y B son sucesos independientes si la probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B, no sufre modificaciones desde el punto de vista matemático esto se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(A/B) &= P(A) \\ P\left(\frac{A}{B}\right) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= P(A) \\ A \cap B &= P(A)P(B) \end{aligned}$$

26

Teorema de Bayes

En la teoría de la probabilidad el teorema de Bayes es un resultado enunciado por Thomas Bayes 1701-61 y que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.

El teorema de Bayes se utiliza para revisar probabilidades previamente calculadas cuando se posee nueva información. Comúnmente se inicia un análisis de probabilidades con una asignación inicial, probabilidad a priori. Cuando se tiene alguna información adicional se procede a calcular las probabilidades revisadas o a posteriori. El teorema de Bayes permite calcular las probabilidades a posteriori y es:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}{P(B)}$$

Donde:

$P(A_i)$: probabilidad a priori

$P\left(\frac{B}{A_i}\right)$: probabilidad condicional

$P(B)$: probabilidad total

$P(A_i/B)$: probabilidad a posteriori

27

Funciones de probabilidad

Cada probabilidad es un número entre 0 y 1, y la suma de todas las probabilidades es 1. Cuando tenemos un suceso, nos interesa saber si hay muchas o pocas posibilidades de que ocurra al realizar el experimento. A la representación de los valores y sus probabilidades la llamamos función de probabilidad o función de masa. La función de probabilidad será, pues, una relación entre el conjunto de los posibles resultados y el conjunto de números reales, que asignará a cada suceso la probabilidad de que se verifique. Es decir, la relación entre cada posible resultado, y la probabilidad que tiene cada uno. La notación: $P(x_i)$ significará: probabilidad de que se verifique el suceso x_i .

Otra notación utilizada es:

$$P(x_i) = P\{w / X(w) = x_i\} = f(x_i)$$

28

Distribuciones de Probabilidad

- **Variable discreta**

En teoría de la probabilidad y estadística, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho suceso ocurra.

- **Esperanza matemática**

La esperanza matemática de una variable aleatoria X es el número que expresa el valor medio del fenómeno que representa dicha variable. La esperanza matemática, también llamada valor esperado, es igual al sumatorio de las probabilidades de que exista un suceso aleatorio, multiplicado por el valor del suceso aleatorio.

- **Variable continua**

Una distribución continua describe las probabilidades de los posibles valores de una variable aleatoria continua. Una variable aleatoria continua es una variable aleatoria con un conjunto de valores posibles (conocido como el rango) que es infinito y no se puede contar.

29

Capítulo III: Generación de números aleatorios

30

Capítulo III: Generación de números aleatorios

En simulación, el concepto de aleatoriedad tiene utilidad en las siguientes situaciones:

Primero, a través de fenómenos estrictamente aleatorios como por ejemplo: el resultado de tirar un dado, girar una ruleta, extraer una balota en el sorteo de la lotería, etc.

También existen situaciones que se asumen como aleatoria por falta de mayor información, a fin de simplificar la lógica del modelo de simulación.

En estos casos, la variable podría ser calculada determinísticamente, pero modelarla como tal implica un costo que no se justifica en función de la calidad de los resultados de la simulación.

31

Propiedades de los números aleatorios

Una secuencia R_1, R_2, \dots , de números aleatorios debe satisfacer dos propiedades fundamentales:

Uniformidad: los números de la secuencia siguen una distribución continua uniforme con valores comprendidos entre 0 y 1.

Independencia: cada valor R_i de la secuencia es independiente de los restantes valores R_j de la secuencia.

32

Técnicas para la generación de números aleatorios

Existen diversos métodos a la hora de generar los números aleatorios. Se agrupan en dos métodos: Algoritmos no congruenciales y algoritmos congruenciales (Rodríguez González, y otros, 2011):

Algoritmos No Congruenciales

- **Método de los cuadrados medios**

Propuesto en la década de los cuarenta del siglo XX por John von Neumann y Nicholas Metrópolis, este algoritmo necesita un número entero, denominado semilla, con D dígitos, este es elevado al cuadrado para seleccionar del resultado los D dígitos del centro; el primer número r se determina simplemente anteponiendo el "0" a esos dígitos. Para obtener el segundo r se sigue el mismo procedimiento, sólo que ahora se elevan al cuadrado los D dígitos del centro que se seleccionaron para obtener el primer n . Este método se repite hasta obtener n números n (Cao Abad, 2002).

- **Algoritmo de productos medios**

La mecánica de generación de números pseudoaleatorios de este algoritmo no congruencial es similar a la del algoritmo de cuadrados medios.

33

Algoritmos Congruenciales

- **Algoritmo Lineal**

Fue propuesto por D.H. Lehmer en 1951. El algoritmo congruencial lineal genera una secuencia de números enteros por medio de la siguiente ecuación recursiva

Tests para números aleatorios

- Existen varios tests que ayudan a establecer si una secuencia de números pseudo-aleatorios respeta las propiedades de los números aleatorios:
- Tests de Frecuencia
- Tests de Corridas
- Tests de Autocorrelación
- Tests de Gap
- Tests de Poker

34

Capítulo IV: Teoría de Colas

35

Capítulo IV: Teoría de Colas

Las colas son un objeto frecuente en la vida cotidiana. Podemos encontrarle diversas aplicaciones tales como:

- En un cajero
- En un restaurante de comidas rápidas
- Al reservar una cita médica

La teoría de colas es una disciplina, dentro de la Investigación Operativa, que tiene por objeto el estudio y análisis de situaciones en las que existen entes que demandan cierto servicio, de tal forma que dicho servicio no puede ser satisfecho inmediatamente, por lo cual se producen esperas (González Ariza, 2003).

36

Descripción de un sistema de colas

Un sistema de colas puede dividirse entre la cola y la instalación del servicio. Sin embargo para mayor facilidad en el análisis del sistema, hemos de introducir otros elementos como los que mencionaremos a continuación (C., 2011):

- Fuente de entrada: Conjunto de individuos u objetos que solicitan el servicio en cuestión.
- Cliente: Es todo individuo que solicita el servicio.
- Capacidad de la cola: El máximo de clientes que pueden estar en la cola. Puede suponerse finito o infinito.
- Disciplina de la cola: Es el modo en el que los clientes son seleccionados para ser servidos.
- Mecanismo de servicio: Es el procedimiento por el cual se da el servicio que los clientes solicitan. Para determinar totalmente el mecanismo de servicios, debemos conocer el número de servidores.

37

Costos de un sistema de colas

En un sistema de colas se pueden encontrar varios costos. Entre ellos están:

- Costo de espera: Es el costo para el cliente al esperar. Representa el costo de oportunidad del tiempo perdido. Un sistema con un bajo costo de espera es una fuente importante de competitividad
- Costo de servicio: Es el costo de operación del servicio brindado. Es más fácil de estimar que el costo de espera.

El objetivo de un sistema de colas es encontrar el sistema del costo total mínimo.

38

Llegadas

El tiempo que transcurre entre dos llegadas sucesivas en el sistema de colas se llama tiempo entre llegadas. El tiempo entre llegadas tiende a ser muy variable.

El número esperado de llegadas por unidad de tiempo se llama tasa media de llegadas (λ)

El tiempo esperado entre llegadas es $1/\lambda$.

Por ejemplo, si la tasa media de llegadas es $\lambda = 50$ clientes por hora

Entonces el tiempo esperado entre llegadas es $1/\lambda = 1/50 = 0.02$ horas ó 2 minutos

Además es necesario estimar la distribución de probabilidad de los tiempos entre llegadas.

39

Distribución exponencial

Generalmente se supone una distribución exponencial, lo cual depende del comportamiento de las llegadas.

La forma algebraica de la distribución exponencial es:

$$P(\text{tiempo de servicio} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Donde t representa una cantidad expresada en (horas, minutos, etc.) de tiempo unidades de tiempo.

40

Distribución de Poisson

Es una distribución discreta empleada con mucha frecuencia para describir el patrón de las llegadas a un sistema de colas.

Para tasas medias de llegadas pequeñas es asimétrica y se hace más simétrica y se aproxima a la binomial para tasas de llegadas altas.

Su forma algebraica es:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Dónde:

- $P(k)$: probabilidad de k llegadas por unidad de tiempo
- λ : tasa media de llegadas
- $e = 2,7182818...$

41

La cola

- El número de clientes en la cola es el número de clientes que esperan el servicio.
- El número de clientes en el sistema es el número de clientes que esperan en la cola más el número de clientes que actualmente reciben el servicio.

La capacidad de la cola es el número máximo de clientes que pueden estar en la cola. Generalmente se supone que la cola es infinita. Aunque también la cola puede ser finita.

42

El Servicio

Hay que tomar en cuenta que el servicio puede ser brindado por un servidor o por servidores múltiples. El tiempo de servicio varía de cliente a cliente, como también podría tener una duración uniforme, en situaciones como por ejemplo servicios brindados por máquinas. El tiempo esperado de servicio depende de la tasa media de servicio (μ).

Por ejemplo:

- El tiempo esperado de servicio equivale a $1/\mu$
- Por ejemplo, si la tasa media de servicio es de 30 clientes por hora
- Entonces el tiempo esperado de servicio es $1/\mu = 1/30 = 0.03$ horas, o 3 minutos.
- Es necesario seleccionar una distribución de probabilidad para los tiempos de servicio
- Hay dos distribuciones que representarían puntos extremos:
- La distribución exponencial (σ =media)
- Tiempos de servicio constantes ($\sigma=0$)

43

Desempeño del Sistema de Colas

• En principio el sistema está en un estado inicial. Se supone que el sistema de colas llega a una condición de estado estable (nivel normal de operación). Sin embargo, pueden existir otras condiciones anormales (horas pico, días de pago, etc.) Para mayor facilidad de estudio, lo que interesa es el estado estable.

Para evaluar el desempeño se busca conocer dos factores principales:

- El número de clientes que esperan en la cola
- El tiempo que los clientes esperan en la cola y en el sistema

• Estas son las principales medidas de desempeño de un sistema:

- Número esperado de clientes en la cola L_q
- Número esperado de clientes en el sistema L_s
- Tiempo esperado de espera en la cola W_q
- Tiempo esperado de espera en el sistema W_s

44

Factor de utilización del sistema

Dada la tasa media de llegadas λ y la tasa media de servicio μ , se define el factor de utilización del sistema ρ .

En general, $\rho < 1$

Su fórmula, con un servidor y con s servidores, respectivamente, está plasmada en la Figura:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

45

Modelo de Colas

Existen diferentes modelos de colas que utilizan un servidor. A continuación, presentaremos las medidas de desempeño en cada modelo y un ejemplo para ilustrar.

- Modelo M/M/1: Un servidor con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales.
- Modelo M/G/1: Un sistema M/G/1 tiene una llegada de tipo exponencial de clientes de tasa λ , la atención de cada uno de ellos toma un tiempo de servicio con media $1/\mu$ y varianza σ_s^2 y cuenta con sólo un servidor

- Modelo M/D/1
- Modelo M/E_k/1

$$L_s = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \quad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$P_s = (1 - \rho)\rho^n \quad P(L_s > n) = \rho^{n+1}$$

$$P(W_s > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} \quad P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$$

$$t \geq 0, \rho < 1$$

$$L_s = L_q + \rho \quad L_q = \frac{\lambda^2 \sigma_s^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$P_s = 1 - \rho \quad P_q = \rho$$

$$\rho < 1$$

$$L_s = \lambda W_s \quad L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\rho < 1$$

$$L_s = \lambda W_s \quad L_q = \frac{\rho^2(k+1)}{2k(1-\rho)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\rho < 1$$

46

Método de Montecarlo

La simulación de Monte Carlo es un proceso estocástico numérico, es decir, una secuencia de estados cuya evolución viene determinada por sucesos aleatorios (Illana, 2013). Es preciso recordar que un suceso aleatorio es un conjunto de resultados que se producen con cierta probabilidad.

La simulación de Monte Carlo hace uso de la estadística y la computación para imitar, mediante modelos matemáticos, el comportamiento aleatorio de sistemas reales no dinámicos.

47

Algunos ejemplos de aplicaciones del método de Montecarlo, se da en los siguientes campos:

- Criptografía
- Programación
- Dinámica cuántica
- Ecología
- Pronósticos de la Bolsa
- Sistemas de colas
- Prospecciones en explotaciones petrolíferas

Claves del método de Montecarlo:

- Crear un modelo matemático del sistema que se requiere analizar.
- Identificar las variables cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema.
- Se lleva a cabo un experimento consistente en generar muestras aleatorias para las variables.
- Tras repetir n veces este experimento, dispondremos de n observaciones sobre el comportamiento del sistema.

48

Capítulo V: Simulación con el software Arena

49

Capítulo V: Simulación con el software Arena

El software de simulación ARENA es una herramienta que permite construir el modelo del sistema o proceso a estudiar de manera gráfica mediante la utilización de una serie de módulos. Una vez realizado el 'organigrama' del sistema, se introducen los datos de dichos módulos y se ejecuta la simulación (Altiok & Melamed, 2007).

La ventana principal del software ARENA presenta tres regiones o ventanas correspondientes a (Vieira, Dias, Pereira, & Oliveira):

- Barra de Proyectos
- Organigrama o Modelo
- Datos

La Barra de Proyectos (ventana vertical a la izquierda) presenta los diferentes paneles de módulos que se pueden utilizar; en este curso se utilizarán los correspondientes al Panel de Basic Process (en la Barra de Proyectos de la figura se ilustran los módulos correspondientes al panel Basic Process).

50

Algunos términos que son precisos conocer para manejar el software Arena son:

- Entidad: Objeto de interés perteneciente al sistema; es el objeto sobre lo que actúa el proceso (por ejemplo máquinas, mensajes, documentos, clientes, piezas, etc.) Las entidades serán producidas y generalmente demandarán un servicio que será realizado por un servidor que se describirá en términos de recurso.
- Atributo: Propiedad de una entidad. En un sistema pueden existir muchos tipos de entidades y cada una tendrá unas características propias llamadas Atributos. Los atributos representan valores definidos por el usuario y asociados a cada una de las entidades (p.e. tipo de cliente, tamaño del producto, instante en que un trabajo entra en el sistema, etc.) Actividad: Representa un periodo de tiempo de duración específica.
- Recurso: Elemento utilizado para modelar un área donde hay una limitación o restricción; dichas restricciones pueden ser causadas por un número limitado de personas para realizar una acción, espacio de almacenamiento restringido, capacidad de los equipos, etc.
- Colas: Área donde permanece una entidad mientras espera que un recurso está disponible o mientras espera a formar un grupo (batch) con otras entidades.
- Variables: Las variables representan un conjunto de valores globales que se pueden modificar o utilizar sus valores como control en cualquier parte del modelo. Arena tiene dos tipos de variables, las variables definidas por el Usuario y las variables definidas por el Sistema.

51

Módulos Básicos

Create: Este módulo es el punto de entrada de las entidades en el modelo de simulación. Las entidades se crean en base a un tiempo entre llegadas o utilizando una planificación determinada y específica el tipo de entidad

Dispose: Este módulo es el punto final de las entidades en el modelo de simulación. Las estadísticas pueden ser registradas antes de que la entidad abandone el sistema

Process: Este módulo se ha diseñado como el principal método de procesamiento de las entidades en la simulación.

52

Los posibles tipos de procesamiento dentro del módulo son los siguientes (campo Action).

- **Delay:** Se producirá un retraso pero no se utilizará ningún recurso o limitación.
- **Seize Delay:** Uno o varios recursos se utilizarán en el módulo Process y también se producirá un retraso, y la liberación del recurso se producirá más tarde.
- **Seize Delay Release:** Se utilizará un recurso seguido de un retraso y entonces se liberará el recurso utilizado.
- **Delay Release:** indica que un recurso que ha sido previamente utilizado será liberado una vez transcurra un determinado retraso. En los casos necesarios se debe indicar la lista de recursos que son utilizados en dicho módulo y la cantidad de los mismos que serán capturados y liberados.
- **Decide:** Este módulo permite realizar procesos de decisión en el sistema de simulación; esto incluye opciones de toma de decisiones basadas en una o más condiciones (p.e. si el tipo de entidad es Tarjeta Oro) o basado en una o varias probabilidades (p.e. 75% verdadero; 25% falso).
- **Batch:** Este módulo permite el agrupamiento de entidades en el modelo de simulación.
- **Separate:** Este módulo se utiliza para copiar una entidad entrante en múltiples entidades o para separar una entidad previamente agrupada mediante el módulo batch.
- **Assign:** Este módulo se utiliza para asignar a las entidades que entren al módulo nuevos valores a variables, atributos de entidades, tipos de entidades, dibujos de entidades y otras variables del sistema.
- **Record:** Este módulo se utiliza para recoger las estadísticas de la simulación del modelo.

53

Se comenzará con nuestro primer caso en el software Arena. Se simulará un proceso básico de una caja de un negocio. Para ello se utilizarán 3 módulos: Create, Process y Dispose.

Ahora se procede a configurar cada módulo. En primer lugar con el módulo Create. Se cambia el nombre del módulo por "*Llegada de Clientes*". El tipo de entidad se denominará "*Clientes*", los tiempos entre llegadas son definidos como "*Rndom (Expo)*" con un valor de 5. La unidad base de tiempo para este módulo será "*minutos*".

Primeros Pasos con Arena

54

Proceso con Condicionales

Otra funcionalidad que nos permite Arena es el uso de condicionales. Ya sea de entrada o salida a un proceso, esto permite distribuir en varias vías los procesos para asegurar una mejor simulación.

55