Teoría básica de conjuntos y Sistemas de ecuaciones

13 de junio de 2023

Índice general

Capítulo 1

Conjuntos

1.1. Introduccion

Primero, debemos entender qué es una teoría de conjuntos. Una teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los conjuntos, que son colecciones de objetos o elementos que tienen algo en común.

Georg Cantor fue un matemático alemán del siglo XIX que se interesó en el estudio de los conjuntos infinitos y en cómo se podían comparar y clasificar:

- Cantor comenzó su trabajo en teoría de conjuntos definiendo lo que se conoce como el conjunto vacío. El conjunto vacío es un conjunto que no tiene ningún elemento. Se puede denotar como $\varnothing$.

- Después, Cantor definió lo que se conoce como un conjunto finito. Un conjunto finito es un conjunto que tiene un número limitado de elementos. Por ejemplo, el conjunto de colores del arco iris es finito, ya que solo hay siete colores.

- Luego, Cantor se interesó en los conjuntos infinitos. Definió los conjuntos infinitos como aquellos que tienen una cantidad infinita de elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales es un conjunto infinito, ya que nunca termina.

- Finalmente, Cantor desarrolló la idea de que hay conjuntos infinitos que no se pueden comparar en tamaño con otros conjuntos. Estos conjuntos se conocen como conjuntos innumerables o no numerables. El conjunto de todos los números reales es un ejemplo de un conjunto innumerable.

1.2. Concepto de Conjuntos

Definición 1.1. *Un conjunto es una colección bien definida de objetos matemáticos, que se llaman elementos del conjunto. Los elementos de un conjunto pueden ser números, letras, palabras, figuras, funciones, entre otros. El conjunto se denota por una letra mayúscula y los elementos del conjunto se escriben entre llaves.*

Para definir un conjunto, se puede utilizar la notación de llaves, es decir, se escriben los elementos del conjunto separados por comas dentro de un par de llaves. Por ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Esta notación define el conjunto A que contiene los elementos 1, 2, 3, 4 y 5.

También se puede definir un conjunto mediante una propiedad que deben cumplir sus elementos.

$$A = \{x \,|\, \text{propiedad de } x\}$$

Primero se escribe el tipo de elemento que es y luego la propiedad que tiene que cumplir.Por ejemplo:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 4\}$$

Esta notación define el conjunto B como el conjunto de todos los números reales x tales que $x^2 < 4$. En este caso, B está formado por todos los números reales que son menores que 2 y mayores que -2.

Definición 1.2. *El cardinal de un conjunto A es el número de elementos distintos que hay en A. Si A es un conjunto finito, su cardinal es un número natural. Si A es infinito, su cardinal puede ser numerable o no numerable*

Por ejemplo:

- Conjunto vacío $\emptyset$: Es el conjunto que no tiene elementos. Su cardinal es 0.
- Conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$: Es el conjunto que contiene todos los números naturales, es decir, $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$. Su cardinal es infinito numerable.
- Conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$: Es el conjunto que contiene todos los números enteros $\mathbb{Z} = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$. Su cardinal es infinito numerable, es decir, tiene la misma cantidad de elementos que los números naturales.
- Conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$: Es el conjunto que contiene todos los números racionales, es decir, aquellos que se pueden expresar como una fracción $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$. Su cardinal es infinito numerable.
- Conjunto de los números reales $\mathbb{R}$: Es el conjunto que contiene todos los números reales, es decir, aquellos que se pueden representar en una recta real. Su cardinal es infinito no numerable, es decir, no se puede hacer una correspondencia biunívoca entre los elementos de este conjunto y los números naturales o enteros.
- Conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$: Es el conjunto que contiene todos los números complejos, es decir, aquellos que se pueden escribir en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria. Su cardinal es infinito no numerable.

1.2.1. Propiedades de Conjuntos

Definición 1.3 (Pertenencia)**.** *Se dice que x es un elemento de A si x está en A, lo que se denota como $x \in A$.*

Definición 1.4 (Inclusión)**.** *Dado dos conjuntos A y B, se dice que A es subconjunto de B, denotado como $A \subseteq B$, si y solo si cada elemento de A es también un elemento de B. Es decir, si para todo $x \in A$, se tiene que $x \in B$.*

En otras palabras, A es subconjunto de B si todos los elementos de A están contenidos en B. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces A es subconjunto de B porque todos los elementos de A también están en B. La notación para indicar que A es subconjunto de B es $A \subseteq B$.

Ejemplos:

- El conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ tiene tres elementos, es decir, $1 \in A$, $2 \in A$ y $3 \in A$.
- El conjunto $C = \{1, 2, 3\}$ es un subconjunto de $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ya que todos los elementos de C también son elementos de D. Es decir, $C \subseteq D$.
- El conjunto $E = \{1, 2, 3\}$ no es un subconjunto de $F = \{1, 2, 4, 6\}$, ya que el elemento $3 \in E$ no es un elemento de F. Es decir, $E \nsubseteq F$.

Lema 1.2.1. *Dado un conjunto A, el conjunto vacío $\emptyset$ está incluido en A.*

Demostración. Supongamos que $\emptyset$ no está incluido en A. Entonces existe un elemento $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Pero esto es una contradicción, ya que no hay ningún elemento en $\emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset \subseteq A$. □

Lema 1.2.2. *Dado un conjunto A, el conjunto A está incluido en sí mismo.*

Demostración. Para todo elemento $x \in A$, se tiene que $x \in A$. Por lo tanto, $A \subseteq A$. □

Lema 1.2.3. *La inclusión es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Es decir, para conjuntos A, B y C, se tiene lo siguiente:*

- *Reflexividad: $A \subseteq A$.*
- *Transitividad: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.*
- *Antisimetría: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.*

1.2.2. Operaciones de Conjuntos

Existen varias operaciones básicas que se pueden realizar con conjuntos:

Definición 1.5. *Dados dos conjuntos A y B, las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento se definen de la siguiente manera:*

- *La unión de A y B, denotada como $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B o en ambos.*
- *La intersección de A y B, denotada como $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A y en B.*

- *La diferencia de A y B, denotada como $A \setminus B$ o $A - B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A pero no en B.*

- *El complemento de A, denotado como A^c, es el conjunto de todos los elementos que no están en A, pero sí están en el conjunto universo U al que pertenece A.*

Ejemplos:
Considera los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Entonces:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ya que los elementos que están en A o en B son: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- $A \cap B = \{3, 4\}$, ya que los elementos que están en A y en B son: $3, 4$.

- $A \setminus B = \{1, 2\}$, ya que los elementos que están en A pero no en B son: $1, 2$.

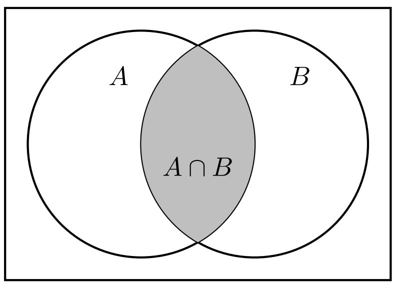
- $B \setminus A = \{5, 6\}$, ya que los elementos que están en B pero no en A son: $5, 6$.

- $A^c = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 5\}$, ya que los elementos que no están en A, pero sí están en $\mathbb{N}$ son: $5, 6, 7, \ldots$

1.2.3. Diagramas de Venn

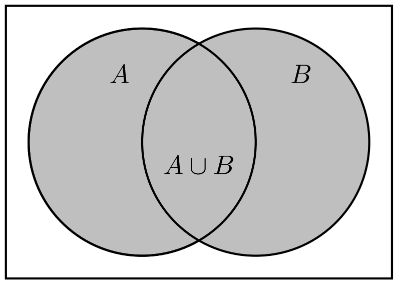
Los diagramas de Venn son representaciones gráficas de conjuntos en los que se utilizan círculos o elipses que se intersecan o se superponen para mostrar las relaciones entre ellos. Fueron creados por el matemático y filósofo inglés John Venn en el siglo XIX como una herramienta para visualizar las relaciones entre diferentes conjuntos.

Ejemplo 1: Representación de la intersección entre dos conjuntos A y B

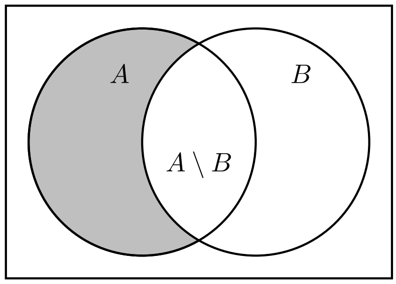


En este diagrama, el rectángulo representa el universo, es decir, el conjunto del que se están tomando los elementos. El círculo A representa un conjunto A, el círculo B representa un conjunto B, y la intersección entre ellos se denota como $A \cap B$.

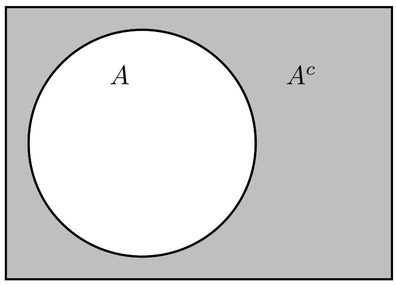
Ejemplo 2: Representación de la unión entre dos conjuntos A y B



Ejemplo 3: Representación de la diferencia entre dos conjuntos A y B



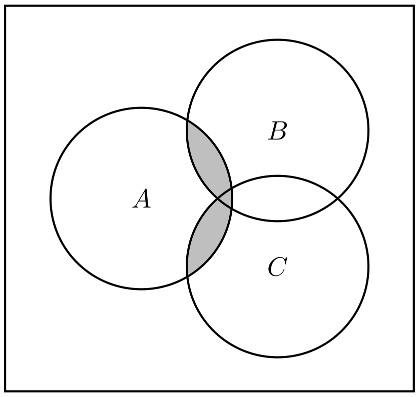
Ejemplo 4:



Definición 1.6. *La ley distributiva de conjuntos establece que para cualquier conjunto A y los conjuntos B y C que estén incluidos en el mismo conjunto universal, se cumple que:*

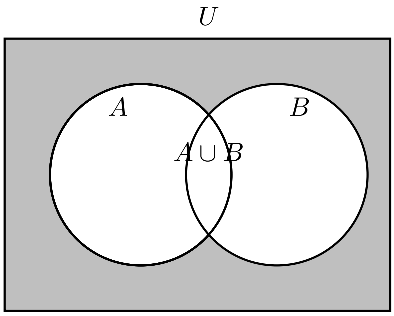
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

En otras palabras, la intersección de un conjunto A con la unión de los conjuntos B y C es igual a la unión de la intersección de A con B y la intersección de A con C.

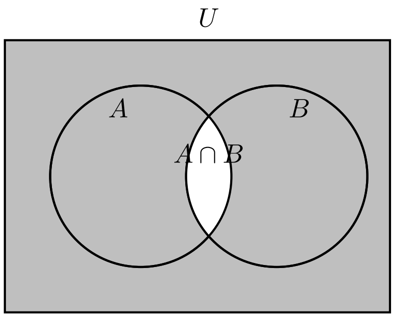


Definición 1.7 (Ley de De Morgan). *Dado un conjunto universal U y dos subconjuntos A y B de U, la ley de De Morgan establece que:*

- *La negación (o complemento en teoría de conjuntos) de la unión de A y B es la intersección de las negaciones de A y B: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$*



- *La negación de la intersección de A y B es la unión de las negaciones de A y B: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$*



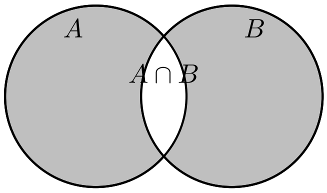
Definición 1.8. *Ley de la diferencia simétrica Para cualquier dos conjuntos A y B, la diferencia simétrica de A y B se define como:*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

En otras palabras, $A \triangle B$ es el conjunto de elementos que están en A o en B, pero no en ambos.

También podemos expresar la ley de la diferencia simétrica como:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



Ejercicios:

1. Dados los conjuntos:
   $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,
   $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$,
   $B = \{3, 6, 9, 12\}$ y
   $C = \{1, 4, 7, 10\}$, determina:

   a) $(A \cap B)^c \setminus C$

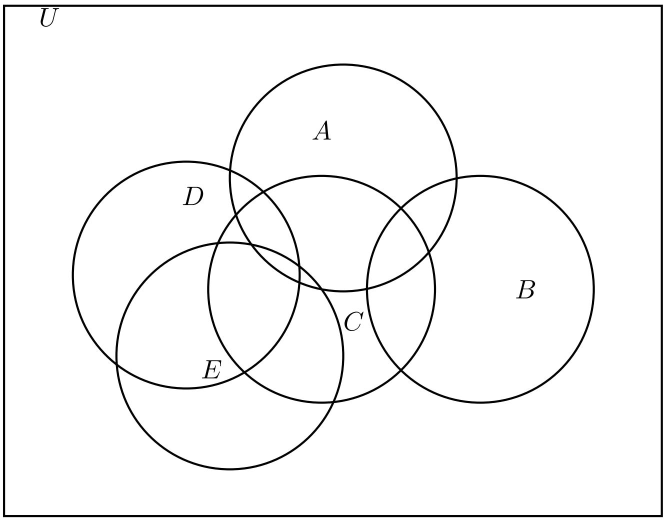
   b) $(A \cup C)^c \bigtriangleup ((B \cup C) \setminus A)$

2. Dados los conjuntos:
   $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 4\}$
   $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x + 4 \leq 3\}$
   $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2x + 2 \geq 2\}$ Determinar:

   a) $(A \cup C)^c \setminus B$

   b) $(A \cap B)^c \bigtriangleup ((B \cap C)^c \setminus A)$

3. Dado



   Determinar:

   a) $(A \cup C)^c \setminus ((B \cap (C \cup D))$

   b) $(A \cap E)^c \bigtriangleup ((B \cap D)^c \setminus C)$

Capítulo 2

Lógica

2.1. Introduccion

Definición 2.1. *Una* ***proposición*** *es una afirmación que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo.*

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1.1. *"El sol es una estrella" es una proposición verdadera.*

Ejemplo 2.1.2. *"2 + 2 = 5" es una proposición falsa.*

Ejemplo 2.1.3. *"Los unicornios existen" es una proposición falsa.*

Definición 2.2. ***Conectivos lógicos:*** *Los conectivos lógicos son símbolos que se utilizan para unir proposiciones y formar nuevas proposiciones. Algunos de los conectivos lógicos más comunes son: la conjunción (representada por el símbolo* $\wedge$*), la disyunción (representada por el símbolo* $\vee$*) y la negación (representada por el símbolo* $\neg$*).*

- **Conjunción (and):** La conjunción es un conectivo lógico que se utiliza para unir dos proposiciones, formando una nueva proposición que es verdadera solamente si ambas proposiciones originales son verdaderas. Se representa con el símbolo $\wedge$. Por ejemplo, si tenemos las proposiciones p y q, la proposición p $\wedge$ q será verdadera solamente si ambas proposiciones p y q son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Disyunción (or):** La disyunción es un conectivo lógico que se utiliza para unir dos proposiciones, formando una nueva proposición que es falsa solamente si ambas proposiciones originales son falsas. Se representa con el símbolo $\vee$. Por ejemplo, si tenemos las proposiciones p y q, la proposición p $\vee$ q será falsa solamente si ambas proposiciones p y q son falsas.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- **Negación (not):** La negación es un conectivo lógico que se utiliza para negar una proposición, cambiando su valor de verdad. Se representa con el símbolo $\neg$. Por ejemplo, si tenemos la proposición p, la proposición $\neg$p será verdadera solamente si p es falsa.

p	$\neg p$
0	1
1	0

- **Implicación (implies):** La implicación es un conectivo lógico que se utiliza para indicar que la verdad de una proposición implica la verdad de otra proposición. Se representa con el símbolo $\Rightarrow$. Por ejemplo, si tenemos las proposiciones p y q, la proposición p $\Rightarrow$ q será falsa solamente si p es verdadera y q es falsa.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- **XOR (exclusive or):** El XOR es un conectivo lógico que se utiliza para unir dos proposiciones, formando una nueva proposición que es verdadera solamente si una de las proposiciones originales es verdadera y la otra es falsa. Se representa con el símbolo $\veebar$. Por ejemplo, si tenemos las proposiciones p y q, la proposición p $\veebar$ q será verdadera solamente si p es verdadera y q es falsa, o si p es falsa y q es verdadera.

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- **NAND (not and):** El NAND es un conectivo lógico que se utiliza para unir dos proposiciones, formando una nueva proposición que es falsa solamente si ambas proposiciones originales son verdaderas. Se representa con el símbolo $\uparrow$. Es el negado de la conjunción. Por ejemplo, si tenemos las proposiciones p y q, la proposición p $\uparrow$ q será falsa solamente si ambas proposiciones p y q son verdaderas.

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- **NOR (not or):** El NOR es un conectivo lógico que se utiliza para unir dos proposiciones, formando una nueva proposición que es verdadera solamente si ambas proposiciones originales son falsas. Se representa con el símbolo $\downarrow$. Es el negado de la disyunción. Por ejemplo, si tenemos las proposiciones p y q, la proposición p $\downarrow$ q será verdadera solamente si ambas proposiciones p y q son falsas.

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Definición 2.3. *Tabla de verdad La tabla de verdad es una herramienta utilizada en la lógica para mostrar los posibles valores de verdad de una proposición compuesta en función de los valores de verdad de sus proposiciones simples.*

Definición 2.4. ***Equivalencia lógica ($\equiv$):*** *La equivalencia lógica es una relación entre dos proposiciones que indican que ambas proposiciones tienen el mismo valor lógico para todas las asignaciones posibles de verdad a las variables proposicionales. Es decir, dos proposiciones son equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Se representa con el símbolo $\equiv$. Por ejemplo, las proposiciones $p \vee q$ y $q \vee p$ son equivalentes.*

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
0	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*1*	*1*
1	*1*	*1*	*1*	*1*

Ejemplo 2.1.4. *Sea p, q, y r proposiciones. Entonces, la proposición compuesta $p \veebar q \vee \neg r$ seria:*

p	q	r	$p \veebar q$	$\neg r$	$p \veebar q \vee \neg r$	*Resultado*
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
0	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
1	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*

Ejemplo 2.1.5. *Sea p, q, y r proposiciones. Entonces, la proposición compuesta $p \vee (q \wedge \neg r)$ seria:*

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \vee (q \wedge \neg r)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Definición 2.5. *Leyes del álgebra de proposiciones*

- ***Ley conmutativa:*** $p \vee q \equiv q \vee p$ *y* $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- ***Ley asociativa:*** $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ *y* $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- ***Ley distributiva:*** $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *y* $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- ***Ley de Morgan:*** $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ *y* $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- ***Ley de idempotencia:*** $p \vee p \equiv p$ *y* $p \wedge p \equiv p$
- ***Ley de negación doble:*** $\neg(\neg p) \equiv p$
- ***Ley de absorción:*** $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ *y* $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- ***Ley de la identidad:*** $p \vee \emptyset \equiv p$ *y* $p \wedge 1 \equiv p$
- ***Ley de complemento:*** $p \vee \neg p \equiv 1$ *y* $p \wedge \neg p \equiv \emptyset$

Definición 2.6. *Tautología, Contradicción e Indeterminación*

Una proposición es una ***tautología*** *si es verdadera en todas las posibles interpretaciones de sus variables proposicionales. Es decir, su tabla de verdad siempre tiene todos sus valores de verdad en verdadero.*

Por ejemplo, la proposición $(p \vee \neg p)$ *es una tautología, ya que su tabla de verdad es la siguiente:*

p	$\neg p$	$(p \vee \neg p)$
1	0	1
0	1	1

Una proposición es una ***contradicción*** *si es falsa en todas las posibles interpretaciones de sus variables proposicionales. Es decir, su tabla de verdad siempre tiene todos sus valores de verdad en falso.*

Por ejemplo, la proposición $(p \wedge \neg p)$ *es una contradicción, ya que su tabla de verdad es la siguiente:*

p	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$
1	0	0
0	1	0

Una proposición es ***indeterminada*** *si su tabla de verdad tiene al menos una fila donde el valor de verdad es indeterminado (ni verdadero ni falso).*

Por ejemplo, la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$ *es indeterminada, ya que su tabla de verdad es la siguiente:*

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(\neg p \Rightarrow q)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Definición 2.7. *Métodos de Demostración en Matemáticas*

En matemáticas, hay varios métodos de demostración que se utilizan para establecer la veracidad de una proposición. Algunos de los métodos más comunes son:

- *Demostración directa*
- *Reducción al absurdo*
- *Contraposición*
- *Inducción matemática*

Cada método de demostración tiene sus propias fortalezas y debilidades, y la elección del método depende de la naturaleza de la proposición y de las herramientas matemáticas disponibles.

Definición 2.8. *Demostración Directa*

*La **demostración directa** es un método de demostración en el cual se establece la verdad de una proposición mediante una serie de pasos lógicos que llevan a la conclusión deseada. En una demostración directa, se parte de las premisas y se llega a la conclusión mediante una serie de pasos lógicos que siguen las leyes de la lógica matemática.*

Por ejemplo, para demostrar que la suma de dos números impares es par, podemos utilizar una demostración directa. Supongamos que tenemos dos números impares a y b. Entonces, podemos escribir $a = 2k + 1$ y $b = 2j + 1$ para algunos enteros k y j. La suma de estos dos números es:

$$a + b = (2k + 1) + (2j + 1) \qquad = 2(k + j + 1)$$

Como $k + j + 1$ es un entero, esto implica que $a + b$ es par.

Definición 2.9. *Reducción al Absurdo*

La reducción al absurdo es un método de demostración que se basa en la suposición temporal de que la proposición a demostrar es falsa, y luego se demuestra que esta suposición conduce a una contradicción. En el caso de la proposición "La suma de dos números impares es par", se puede demostrar por reducción al absurdo de la siguiente manera:

Supongamos que la proposición es falsa, es decir, que la suma de dos números impares es impar. Entonces, para cualquier número impar a y b, su suma $a + b$ es también impar.

Podemos expresar los números impares en términos de su forma canónica como $a = 2n + 1$ y $b = 2m + 1$, donde n y m son enteros. Entonces, la suma de los dos números impares es:

a+b=(2n+1)+(2m+1)=2(n+m)+2=2(n+m+1)

Como n y m son enteros, su suma $n+m$ es también un entero, y por lo tanto $n+m+1$ también es un entero. Entonces, la suma de dos números impares $a+b$ es igual a 2 multiplicado por un entero, lo que significa que es un número par.

Hemos llegado a una contradicción, ya que habíamos supuesto que la suma de dos números impares era impar, pero hemos demostrado que es par. Por lo tanto, nuestra suposición inicial debe ser falsa y la proposición original es verdadera: la suma de dos números impares es par.

Definición 2.10. *Contraposición*

La ***contraposición*** *es un método de demostración en el cual se establece la verdad de una proposición mediante la demostración de su contrapositiva. La contrapositiva de una proposición es otra proposición que se obtiene al negar tanto su conclusión como su premisa y cambiar el orden de los términos.*

En el caso de la proposición "Si n^2 es par, entonces n es par", su contrapositiva es "Si n es impar, entonces n^2 es impar". Supongamos que n es impar. Entonces, podemos escribir n en términos de su forma canónica como $n = 2k+1$, donde k es un entero. Entonces, elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Como $2k^2 + 2k$ es un entero, entonces n^2 se puede expresar como 2 multiplicado por un entero más 1, lo que significa que n^2 es impar.

Por lo tanto, hemos demostrado que si n es impar, entonces n^2 es impar.

Definición 2.11. *Inducción Matemática*

La ***inducción matemática*** *es un método de demostración utilizado para establecer la veracidad de una proposición que depende de un entero natural n. Para demostrar una proposición mediante inducción matemática, se deben seguir dos pasos:*

1. ***Caso base:*** *Demostrar que la proposición es verdadera para el caso más simple, que generalmente es $n = 1$.*

2. ***Paso inductivo:*** *Suponer que la proposición es verdadera para un entero $n = k$, y demostrar que esto implica que la proposición también es verdadera para $n = k+1$.*

Por ejemplo, para demostrar que la suma de los primeros n números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, podemos utilizar la inducción matemática. El caso base es cuando $n = 1$, ya que la suma de los primeros 1 número es simplemente 1, y $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Ahora, supongamos que la proposición es verdadera para $n = k$. Es decir, la suma de los primeros k números naturales es igual a $\frac{k(k+1)}{2}$. Queremos demostrar que la proposición también es verdadera para $n = k+1$. La suma de los primeros $k+1$ números naturales es:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \quad = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Lo cual es igual a la fórmula deseada para $n = k+1$. Por lo tanto, por el principio de inducción matática, la proposición es verdadera para todos los enteros naturales n.

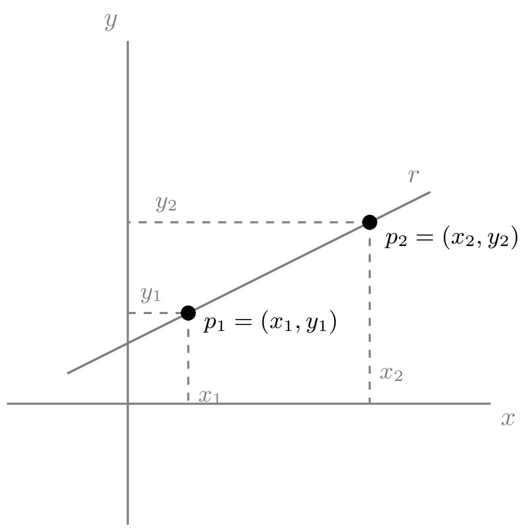
Capítulo 3

Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones

3.1. Ecuación de la recta

La ecuación de la recta es una herramienta fundamental para describir y analizar rectas en el plano cartesiano. En esta sección se presentan las diferentes formas de representar la ecuación de la recta, así como algunas propiedades importantes.

En el siguiente dibujo se muestra una recta r que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).



Una de las formas de representar la ecuación de la recta es mediante la forma vectorial:

Definición 3.1. *La forma vectorial de la ecuación de la recta se expresa como* $\vec{r} = \vec{p_1} + \lambda\vec{v}$*, donde* $\vec{p_1}$ *son las coordenadas de un punto cualquiera perteneciente a la recta,* $\vec{v}$ *es un vector director de la recta y* λ *es un escalar.*

En el dibujo anterior, podemos observar que el vector $\vec{v}$ es el vector que apunta desde el punto $p_1 = (x_1, y_1)$ hacia el punto $p_2 = (x_2, y_2)$, es decir, $\vec{v} = \big(x_2 - x_1 \; y_2 - y_1\big)$.

Por lo tanto, la ecuación vectorial de la recta r que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Otra forma de representar la ecuación de la recta es mediante la forma punto-pendiente. Para obtener esta forma, se necesita conocer la pendiente:

Definición 3.2. *La pendiente m de una recta que pasa por los puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ se define como la relación entre el cambio en la coordenada y y el cambio en la coordenada x entre los dos puntos. En otras palabras, la pendiente está dada por la fórmula:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Definición 3.3. *La ecuación de la recta en su forma punto-pendiente se expresa, con todos los datos anteriores, como:*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

llegado a este punto, la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente se puede utilizar para encontrar la ecuación de una recta pendiente-intersección simplemente despejando:

Definición 3.4. *La ecuación de una recta en su forma pendiente-intersección se expresa como:*

$$y = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es el valor de y en el punto donde la recta cruza el eje y, conocido como la intersección y.

Finalmente si agrupamos términos a izquierda nos queda la ecuación general de la recta que tiene la siguiente forma:

Definición 3.5. *La ecuación de la recta en su forma general se expresa como:*

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B, y C son constantes y A y B no son simultáneamente nulas.

La interpretación geométrica de la ecuación general de la recta es que representa todas las posibles coordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación, es decir, la recta es la colección de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación.

La pendiente m de la recta en su forma pendiente-intersección se obtiene al despejar y de la ecuación general:

$$y = mx + b$$

donde $m = -\frac{A}{B}$ es la pendiente de la recta y $b = -\frac{C}{B}$ es la intersección en el eje y.

3.2. Ecuaciones Cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones polinómicas de segundo grado.

Definición 3.6. *Una ecuación cuadrática es una ecuación polinómica de segundo grado que se puede escribir en la forma:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

La ecuación cuadrática puede tener dos soluciones diferentes, una solución doble o ninguna solución real, dependiendo del valor del discriminante $D = b^2 - 4ac$. La fórmula para calcular las soluciones de la ecuación cuadrática es la siguiente:

Definición 3.7. *Dada la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones de la ecuación están dadas por:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a, b y c son coeficientes reales y $a \neq 0$.

Ejemplo 3.2.1. *Encontrar las soluciones de la ecuación $x^2+3x+2 = 0$ usando la fórmula general.*

$$a = 1, b = 3, c = 2$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -1$ y $x = -2$.

Definición 3.8. *Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2+bx+c = 0$ utilizando el método de factorización, se siguen los siguientes pasos:*

1. *Se escribe la ecuación en la forma $x^2 + bx + c = 0$.*
2. *Se busca un par de factores m y n de tal manera que su suma sea igual a b y su producto sea igual a c. Es decir, $m + n = b$ y $mn = c$.*
3. *Se reescribe la ecuación original utilizando los factores encontrados en el paso anterior. Es decir, $x^2 + mx + nx + c = 0$.*
4. *Se agrupan los términos comunes y se factoriza. Es decir, $(x^2 + mx) + (nx+c) = 0$ y se factoriza el primer paréntesis como $x(x+m)$ y el segundo paréntesis como $n(x + c/n) = n(x + m)$.*
5. *Se agrupan $x(x + m) + n(x + m) = 0$ y sacando factor común $(x + m)$ y nos da $(x + m)(x + n) = 0$*

A continuación, se muestra un ejemplo de cómo resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 5x + 6 = 0$ utilizando el método de factorización:

Ejemplo 3.2.2. *Resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 5x + 6 = 0$ utilizando el método de factorización.*

1. *Se busca un par de factores de tal manera que su suma sea igual a* 5 *y su producto sea igual a* 6*. Los factores que cumplen estas condiciones son* 2 *y* 3*. Por lo tanto, se reescribe la ecuación original como* $x^2+2x+3x+6=0$*.*

2. *Se agrupan los términos comunes y se factoriza, obteniendo* $(x^2+2x)+(3x+6)=0$*.*

3. *Se factoriza el primer paréntesis como* $x(x+2)$ *y el segundo paréntesis como* $3(x+2)$*, obteniendo* $(x+2)(x+3)=0$*.*

4. *Se obtienen las soluciones* $x=-2$ *y* $x=-3$*.*

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2+5x+6=0$ *son* $x=-2$ *y* $x=-3$*.*

3.3. Ecuaciones de Orden Superior

Las ecuaciones de orden superior son ecuaciones polinómicas de grado mayor o igual a dos. La forma general de una ecuación polinómica de orden n es:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \tag{3.1}$$

donde $a_n \neq 0$ y a_i son coeficientes reales o complejos para $i = 0, 1, \ldots, n$.

El proceso general para resolver ecuaciones de orden superior depende del grado de la ecuación y no existe una fórmula general para resolver todas las ecuaciones de este tipo. En el caso de ecuaciones de segundo grado ($n = 2$), existen dos fórmulas conocidas: la fórmula cuadrática y el método de factorización.

Para ecuaciones de tercer grado ($n = 3$), existe la fórmula de Cardano-Tartaglia que permite resolver ecuaciones de esta forma. Para ecuaciones de cuarto grado ($n = 4$), existe la fórmula de Ferrari que permite resolver estas ecuaciones.

En general, para ecuaciones de grado mayor a cuatro, se utilizan métodos numéricos o aproximados para obtener soluciones. Estos métodos pueden incluir métodos iterativos, métodos de bisección o métodos de interpolación.

En el caso de las ecuaciones de orden superior, el número de raíces reales depende del número de veces que la curva de la función intersecta el eje x. Si la curva intersecta el eje x n veces, entonces la ecuación tiene n raíces reales. Por ejemplo, una ecuación cúbica puede tener tres raíces reales distintas, una raíz real y dos raíces imaginarias conjugadas, una raíz real y otra raíz real doble o repetida o tres raíces reales iguales.

3.3.1. División sintética

La división sintética es un método utilizado para dividir un polinomio por un binomio de la forma $(x - c)$, donde c es una constante. Este método simplifica el proceso de división, evitando la necesidad de realizar divisiones largas y reduciendo el número de pasos requeridos.

Para realizar la división sintética, se siguen los siguientes pasos:

1. Se escriben los coeficientes del polinomio en orden descendente y se omiten los términos sin coeficiente.

2. Se coloca el valor de c (constante del binomio) en la parte superior del esquema de división.

3. Se desciende verticalmente por la columna de coeficientes del polinomio y se realizan las operaciones de multiplicación y suma correspondientes.

4. Se escriben los resultados en la siguiente fila.

5. El último número en la última fila es el residuo, y los números restantes en la fila inferior son los coeficientes del cociente.

Ejemplo 3.3.1. *Calcule el cociente y el residuo al dividir el polinomio* $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ *por el binomio* $q(x) = x - 2$ *utilizando la división sintética.*

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ 2 & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, el cociente de la división es $q(x) = x^2 + 4x + 3$ *y el residuo es* $r(x) = 0$.

Ejemplo 3.3.2. *Encontremos todas las raíces del polinomio* $p(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ *utilizando la división sintética.*

Realizamos la división sintética del polinomio por $(x-c)$ *y buscamos los valores de c para los cuales el residuo sea igual a cero. Dado que el término independiente del polinomio es* -18*, los valores posibles para c son* $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

Probamos con $c = -2$*:*

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -9 & -18 \\ -2 & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

Obtenemos un residuo de cero, lo que significa que $x = -2$ *es una raíz del polinomio. Utilizando la división sintética, podemos expresar* $p(x)$ *como* $(x + 2)(x^2 - 9)$.

Ahora realizamos la división sintética del polinomio restante, $x^2 - 9$*, por* $(x - c)$*:*

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -9 \\ 3 & & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Obtenemos un residuo de cero, lo que significa que $x = 3$ *es otra raíz del polinomio. Utilizando la división sintética, podemos expresar* $x^2 - 9$ *como* $(x - 3)(x + 3)$.

En conclusión, las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ *son* $x = -2$, $x = 3$, *y* $x = -3$. *La factorización del polinomio es* $(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.

Ejemplo 3.3.3. *Encontremos todas las raíces del polinomio* $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ *utilizando la división sintética.*

Realizamos la división sintética del polinomio por $(x - c)$ *y buscamos los valores de c para los cuales el residuo sea igual a cero. Dado que el término independiente del polinomio es* -15*, los valores posibles para c son* $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

Probamos con $c = 3$*:*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 11 & -15 \\ 3 & & 3 & -6 & 15 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

Obtenemos un residuo de cero, lo que significa que $x = 3$ es una raíz del polinomio. Utilizando la división sintética, podemos expresar $p(x)$ como $(x - 3)(x^2 - 2x + 5)$.

Ahora, como no tiene ya raices reales, utilizaremos la fórmula general para encontrar las raíces del polinomio cuadrático $x^2 - 2x + 5$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para el polinomio $x^2 - 2x + 5$, tenemos $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$. Sustituyendo en la fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Como el discriminante es negativo, no tenemos raíces reales. Las raíces son imaginarias y se pueden expresar como:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}i}{2} = 1 \pm 2i$$

En conclusión, las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ son $x = 3$, $x = 1 + 2i$ y $x = 1 - 2i$. La factorización del polinomio es $(x-3)(x-(1+2i))(x-(1-2i)) = (x-3)((x-1)^2 + 4)$.

3.3.2. Sistemas de ecuaciones

En el ámbito de las matemáticas, los sistemas de ecuaciones son un conjunto de ecuaciones que se resuelven simultáneamente con el propósito de encontrar los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. Estos sistemas se utilizan en diversas áreas, como la física, la ingeniería y la economía, para modelar situaciones en las cuales varias incógnitas están relacionadas entre sí.

En este contexto, abordaremos la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Un sistema de ecuaciones lineales consiste en un conjunto de ecuaciones lineales, en las cuales cada ecuación representa una recta en un plano o en el espacio. El objetivo es encontrar las coordenadas de los puntos de intersección, si existen, entre estas rectas.

En el caso más simple, consideraremos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para visualizarlo, podemos pensar en dos rectas en el plano cartesiano. La solución del sistema corresponderá a los puntos de intersección entre estas rectas.

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales, pueden darse diferentes situaciones:

1. Solución única: El sistema tiene un único punto de intersección entre las rectas. Esto significa que las dos ecuaciones tienen una única solución común para las variables. En términos geométricos, las rectas se intersectan en un único punto.

2. Infinitas soluciones: El sistema tiene infinitos puntos de intersección entre las rectas. Esto ocurre cuando las dos ecuaciones son linealmente dependientes, es decir, una es múltiplo constante de la otra. En términos geométricos, las rectas coinciden y se superponen una sobre la otra.

3. Sin solución: El sistema no tiene puntos de intersección entre las rectas. Esto sucede cuando las dos ecuaciones son paralelas, es decir, tienen la misma pendiente pero diferentes interceptos. En términos geométricos, las rectas nunca se cruzan.

3.3.3. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones. A continuación, presentaremos tres de los más comunes: el método de sustitución, el método de igualación y el método de reducción.

Método de Sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una variable en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación. Luego, se resuelve la ecuación resultante para encontrar el valor de la variable restante. A continuación, se sustituye este valor en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la variable que se despejó en el primer paso.

Ejemplo 3.3.4. *Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 4x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Para utilizar el método de sustitución, despejemos la variable x en la primera ecuación:

$$x = \frac{7 - 3y}{2}$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, obtenemos:

$$4\left(\frac{7 - 3y}{2}\right) - 2y = 1$$

Resolviendo esta ecuación para y, encontramos:

$$y = \frac{13}{8}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación, obtenemos:

$$2x + 3\left(\frac{13}{8}\right) = 7$$

Resolviendo esta ecuación para x, encontramos:

$$x = \frac{37}{16}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{37}{16}$ y $y = \frac{13}{8}$.

Método de Igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones y igualar las expresiones obtenidas. Luego, se resuelve la ecuación resultante para encontrar el valor de esa variable. Posteriormente, se sustituye este valor en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

Ejemplo 3.3.5. *Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$3x - 2y = 4$$
$$2x + 5y = 1$$

Para utilizar el método de igualación, despejemos la variable x en ambas ecuaciones:

Despejando x en la primera ecuación:

$$x = \frac{4 + 2y}{3}$$

Despejando x en la segunda ecuación:

$$x = \frac{1 - 5y}{2}$$

Igualando las expresiones obtenidas:

$$\frac{4 + 2y}{3} = \frac{1 - 5y}{2}$$

Resolviendo esta ecuación para y, encontramos:

$$8 + 4y = 3 - 15y$$

$$19y = -5$$

$$y = -\frac{5}{19}$$

Sustituyendo este valor de y en una de las ecuaciones originales, por ejemplo, la primera ecuación, obtenemos:

$$3x - 2(-\frac{5}{19}) = 4$$

$$3x + \frac{10}{19} = 4$$

$$3x = \frac{74}{19}$$

$$x = \frac{74}{57}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{74}{57}$ y $y = -\frac{5}{19}$.

Método de Reducción

El método de reducción consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por un factor adecuado para obtener coeficientes iguales o opuestos para una de las variables. Luego, se suman o restan las ecuaciones para eliminar una variable y obtener una ecuación lineal en la variable restante. Finalmente, se resuelve esta ecuación para encontrar el valor de la variable y se sustituye en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

Ejemplo 3.3.6. *Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 10 \end{aligned}$$

Para utilizar el método de reducción, multiplicamos la primera ecuación por 2 *y la segunda ecuación por* -1 *para obtener coeficientes opuestos para la variable* x*:*

$$\begin{aligned} 4x - 6y &= 10 \\ -4x - 6y &= -10 \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones, eliminamos la variable x*:*

$$0x - 12y = 0$$

Esta ecuación nos indica que y *puede tomar cualquier valor. Para encontrar el valor de* x*, sustituimos* y *en una de las ecuaciones originales, por ejemplo, la primera ecuación:*

$$2x - 3(0) = 5$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{5}{2}$ *y* $y = 0$*.*

Copy code

3.4. Inecuaciones

En matemáticas, una inecuación es una desigualdad que involucra una o más variables. Al igual que las ecuaciones, las inecuaciones nos permiten representar relaciones entre cantidades y resolver problemas en los que se busca determinar los valores que satisfacen dichas desigualdades.

Existen diferentes tipos de inecuaciones, tales como inecuaciones lineales, cuadráticas, racionales, valor absoluto, entre otras.

3.4.1. Operaciones en las inecuaciones

En las inecuaciones, al igual que en las ecuaciones, podemos realizar ciertas operaciones para simplificarlas o resolverlas. Las dos operaciones más comunes en las inecuaciones son la suma y la multiplicación.

Suma

Para sumar o restar un número o una expresión a ambos lados de una inecuación, mantenemos la dirección de la desigualdad:

- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
- Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Multiplicación

Cuando multiplicamos o dividimos ambos lados de una inecuación por un número positivo, mantenemos la dirección de la desigualdad:

- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

Sin embargo, cuando multiplicamos o dividimos ambos lados de una inecuación por un número negativo, debemos cambiar la dirección de la desigualdad:

- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
- Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

3.4.2. Ejemplo de resolución de inecuación

Consideremos la siguiente inecuación:

$$2x - 5 > 1$$

Para resolverla, vamos a seguir los siguientes pasos:

1. Aislamos la variable en un lado de la inecuación:

$$2x > 6$$

2. Dividimos ambos lados por el coeficiente de la variable:

$$x > 3$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación es $x > 3$.

3.4.3. Inecuaciones encajadas

Las inecuaciones encajadas, también conocidas como inecuaciones compuestas, son inecuaciones que involucran múltiples desigualdades. En este caso, las desigualdades tienen una cota inferior y una cota superior.

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$-2 < 2x - 1 \leq 4$$

En este caso, la inecuación nos indica que el valor de x debe estar entre dos cotas. Para resolverla, seguimos los siguientes pasos:

1. Aislamos la variable y combinamos las desigualdades:

$$-2 < 2x - 1 \leq 4$$

2. Resolvemos la desigualdad combinada:

$$-2 < 2x - 1 \leq 4 \implies -1 < 2x \leq 5$$

3. Despejamos la variable x:

$$-1 < 2x \leq 5 \implies -\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación es $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{2}$. Esto significa que x debe ser mayor que $-\frac{1}{2}$ y menor o igual a $\frac{5}{2}$.

3.4.4. Inecuaciones con Valor Absoluto

Las inecuaciones con valor absoluto son desigualdades que involucran la función de valor absoluto. Estas inecuaciones nos permiten establecer relaciones entre cantidades que pueden ser positivas o negativas.

Propiedades del Valor Absoluto

Antes de abordar las inecuaciones con valor absoluto, recordemos algunas propiedades importantes de esta función:

1. El valor absoluto de un número real x, denotado por $|x|$, siempre es no negativo. Si x es positivo o cero, entonces $|x| = x$. Si x es negativo, entonces $|x| = -x$.

2. El valor absoluto satisface la propiedad de la multiplicación: $|x{\cdot}y| = |x|{\cdot}|y|$.

3. El valor absoluto satisface la propiedad de la desigualdad: si $a < b$, entonces $|a| < |b|$.

Resolución de Inecuaciones con Valor Absoluto

Para resolver una inecuación con valor absoluto, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Aislar el valor absoluto en un lado de la desigualdad.

2. Descomponer la inecuación en dos casos, uno con el valor absoluto positivo y otro con el valor absoluto negativo.

3. Resolver cada caso por separado y encontrar los valores que satisfacen cada desigualdad.

4. Unir las soluciones de los dos casos y simplificar si es necesario.

A continuación, presentaremos un ejemplo para ilustrar cómo resolver una inecuación con valor absoluto.

Ejemplo 3.4.1. *Consideremos la siguiente inecuación:*

$$|3x - 2| \leq 5$$

Para resolver esta inecuación, descomponemos en dos casos:

Caso 1: $3x - 2 \geq 0$

$$3x - 2 \leq 5$$

$$3x \leq 7$$

$$x \leq \frac{7}{3}$$

Caso 2: $3x - 2 < 0$

$$-(3x - 2) \leq 5$$

$$-3x + 2 \leq 5$$

$$-3x \leq 3$$

$$x \geq -1$$

Uniendo las soluciones de los dos casos, obtenemos que la solución de la inecuación es $x \in [-1, \frac{7}{3}]$.

Otra forma de resolver esta inecuación es sin separarla:

1. Aislar el valor absoluto:

$$-5 \leq 3x - 2 \leq 5$$

2. Resolver la desigualdad compuesta:

$$-5 \leq 3x - 2 \leq 5$$

Sumando 2 en cada lado de la desigualdad:

$$-3 \leq 3x \leq 7$$

Dividiendo cada lado de la desigualdad por 3:

$$-1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación original es:

$$-1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

Resolución de Inecuaciones con Dos Valores Absolutos

Cuando nos enfrentamos a una inecuación que contiene dos valores absolutos, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Aislar cada valor absoluto en un lado de la desigualdad.
2. Resolver las igualdades resultantes de cada valor absoluto por separado para encontrar los puntos críticos. Estos puntos son aquellos valores de x para los cuales se produce la igualdad.
3. Los puntos críticos dividen la recta real en intervalos. En cada intervalo, evaluamos si se cumple o no la desigualdad utilizando un punto de prueba.
4. Unimos los intervalos donde se cumple la desigualdad para obtener la solución final.

A continuación, presentaremos un ejemplo para ilustrar cómo resolver una inecuación con dos valores absolutos.

Ejemplo 3.4.2. *Consideremos la siguiente inecuación:*

$$|2x-1| \geq |3x+4|$$

Pasos para resolver la inecuación:
Caso 1: $2x-1 = 3x+4$
Resolviendo la igualdad $2x-1 = 3x+4$*, encontramos el punto crítico:*

$$x = -5$$

.

Caso 2: $2x-1 = -(3x+4)$
Resolviendo la igualdad $2x-1 = -(3x+4)$*, encontramos el punto crítico:*

$$x = -\frac{3}{5}$$

.

Caso 3: $-(2x-1) = 3x+4$
Misma solución que el caso 2.
Caso 4: $-(2x-1) = -(3x+4)$
Misma solución que el caso 1.
Los puntos críticos dividen la recta real de la siguiente manera:

$$-\infty < -5 < -\frac{3}{5} < +\infty$$

.

Evaluar la inecuación en cada intervalo:

- *Intervalo* $(-\infty, -5)$*:*

  Evaluando la inecuación en $x = -6$*:*

$$|2(-6)-1| \geq |3(-6)+4|$$

$$|-13| \geq |-14|$$

$$13 \geq 14 \;\; (Falso)$$

- *Intervalo* $(-5, -\frac{3}{5})$*:*
  Evaluando la inecuación en $x = -1$*:*

$$|2(-1) - 1| \geq |3(-1) + 4|$$

$$|-3| \geq |1|$$

$$3 \geq 1 \ \ (Verdadero)$$

- *Intervalo* $(-\frac{3}{5}, +\infty)$*:*
  Evaluando la inecuación en $x = 0$*:*

$$|2(0) - 1| \geq |3(0) + 4|$$

$$|-1| \geq |4|$$

$$1 \geq 4 \ \ (Falso)$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación es $x \in [-5, -\frac{3}{5}]$.

Desigualdad de un Polinomio de Orden 2

Para resolver una desigualdad de un polinomio de segundo orden en la forma $ax^2 + bx + c \leq k$, donde a, b, c y k son constantes, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Igualar el polinomio a k: $ax^2 + bx + c = k$.
2. Resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + (c - k) = 0$ para encontrar los puntos críticos del polinomio. Estos puntos críticos son aquellos valores de x donde el polinomio es igual a k.
3. Ordenar los puntos críticos en orden creciente y considerar los intervalos formados por estos puntos.
4. Evaluar el polinomio en un punto dentro de cada intervalo para determinar si el polinomio es menor o igual que k en ese intervalo.
5. Escribir la solución final en términos de intervalos.

A continuación, presentaremos un ejemplo para ilustrar cómo resolver una desigualdad de un polinomio de segundo orden.

Ejemplo 3.4.3. *Consideremos la siguiente desigualdad:*

$$x^2 - 3x + 3 \leq 1$$

Pasos para resolver la desigualdad:

1. *Igualar el polinomio a k:* $x^2 - 3x + 3 = 1$.
2. *Resolver la ecuación cuadrática* $x^2 - 3x + 3 = 1$ *para encontrar los puntos críticos. Restando* 1 *a ambos lados de la ecuación, obtenemos* $x^2 - 3x + 2 = 0$*. Factorizando la ecuación, obtenemos* $(x - 1)(x - 2) = 0$*. Por lo tanto, los puntos críticos son* $x = 1$ *y* $x = 2$.

3. *Ordenar los puntos críticos en orden creciente:* $1, 2$.

Ahora, evaluamos el polinomio en un punto dentro de cada intervalo:

- *Intervalo* $(-\infty, 1)$*: Tomemos* $x = 0$ *como punto de prueba. Evaluando el polinomio, tenemos:*

$$(0)^2 - 3(0) + 3 = 3$$

  La desigualdad $3 \leq 1$ *no se cumple, por lo tanto, este intervalo no forma parte de la solución.*

- *Intervalo* $[1, 2]$*: Tomemos* $x = \frac{3}{2}$ *como punto de prueba. Evaluando el polinomio, tenemos:*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 3 = \frac{9 - 18 + 12}{4} = \frac{3}{4}$$

  La desigualdad $\frac{3}{4} \leq 1$ *se cumple, por lo tanto, este intervalo forma parte de la solución.*

- *Intervalo* $(2, \infty)$*: Tomemos* $x = 3$ *como punto de prueba. Evaluando el polinomio, tenemos:*

$$(3)^2 - 3(3) + 3 = 9 - 9 + 3 = 3$$

  La desigualdad $3 \leq 1$ *no se cumple, por lo tanto, este intervalo no forma parte de la solución.*

Por lo tanto, la solución de la desigualdad es $x \in [1, 2]$.

Ejemplo 3.4.4. *Consideremos la siguiente desigualdad:*

$$|x^2 - 5x + 6| \geq 2x - 3$$

Pasos para resolver la desigualdad:

1. *Descomponer la desigualdad en dos casos, uno con el valor absoluto positivo y otro con el valor absoluto negativo:*

   Caso 1: $x^2 - 5x + 6 \geq 2x - 3$

   Caso 2: $-(x^2 - 5x + 6) \geq 2x - 3$

2. *Resolver cada caso por separado y encontrar los puntos críticos:*

   Caso 1: $x^2 - 5x + 6 \geq 2x - 3$

   Simplificando la desigualdad, tenemos:

   $x^2 - 7x + 9 \geq 0$

   Para encontrar los puntos críticos, resolvemos la igualdad $x^2 - 7x + 9 = 0$ *mediante la fórmula general:*

   $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$

Simplificando:

$x = \frac{7\pm\sqrt{49-36}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

Por lo tanto, los puntos críticos en este caso son $x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ *y* $x = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$.

Caso 2: $-(x^2 - 5x + 6) \geq 2x - 3$

Simplificando la desigualdad, tenemos:

$-x^2 + 5x - 6 \geq 2x - 3$

Reorganizando los términos:

$-x^2 + 3x - 3 \geq 0$

Esta desigualdad no tiene puntos críticos ya que el polinomio de segundo grado no se puede factorizar en este caso.

3. *Evaluar la desigualdad en cada intervalo formado por los puntos críticos:*

   Tomando los puntos críticos $x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ *y* $x = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$, *evaluamos la desigualdad en cada intervalo:*

   Intervalo $(-\infty, \frac{7-\sqrt{13}}{2})$*: Tomemos un valor de prueba, por ejemplo* $x = 0$, *y evaluamos la desigualdad:*

   $|(0)^2 - 5(0) + 6| \geq 2(0) - 3$

   Simplificando:

   $|6| \geq -3$

   La desigualdad se cumple, por lo tanto, este intervalo es parte de la solución.

   Intervalo $[\frac{7-\sqrt{13}}{2}, \frac{7+\sqrt{13}}{2}]$*: Tomemos un valor de prueba, por ejemplo* $x = \frac{7}{2}$, *y evaluamos la desigualdad:*

   $|(\frac{7}{2})^2 - 5(\frac{7}{2}) + 6| \geq 2(\frac{7}{2}) - 3$

   Simplificando:

   $|-\frac{1}{4}| \geq 1$

   La desigualdad no se cumple, por lo tanto, este intervalo no es parte de la solución.

   Intervalo $(\frac{7+\sqrt{13}}{2}, \infty)$*: Tomemos un valor de prueba, por ejemplo* $x = 5$, *y evaluamos la desigualdad:*

   $|(5)^2 - 5(5) + 6| \geq 2(5) - 3$

   Simplificando:

   $|6| \geq 7$

   La desigualdad se cumple, por lo tanto, este intervalo es parte de la solución.

4. *La solución de la desigualdad es* $x \in (-\infty, \frac{7-\sqrt{13}}{2}] \cup (\frac{7+\sqrt{13}}{2}, \infty)$.