UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

SEDE VICTOR LEVI SASSO

FOLLETO

Métodos Numéricos para Ingenieros

INCLUYE PRUEBAS SUMATIVAS Y PRESENTACIONES DEL CONTENIDO

Autor:

Dr. Carlos Rovetto

JUNIO 2021

Contenido

Índice de figuras

Introducción

Parte del estudio de la ingeniería consiste en la creación y el análisis de modelos que representen fenómenos o eventos de la vida real, de modo que sus comportamientos puedan ser analizados y así dar solución a problemas propios de los diferentes campos de estudio. Generalmente, estos problemas son muy complejos y por lo tanto, requieren de un conjunto de herramientas y técnicas que permitan diseñar esos modelos y estudiar los efectos de las variables involucradas.

En este sentido, los métodos numéricos conforman ese conjunto de técnicas que facilitan el análisis y la resolución de problemas y, por consiguiente, estos pueden utilizarse en el diseño de modelos. La amplia variedad de técnicas que se estudian dentro de los métodos numéricos provee un camino simple a la alta complejidad de los problemas en ingeniería. El objetivo de la materia de Métodos Numéricos para Ingenieros no es sólo aprender los pasos de cada método, sino también fomentar y desarrollar en el futuro profesional la habilidad de análisis, de modo que pueda determinar los métodos más adecuados para resolver determinados problemas.

En la actualidad, las computadoras y los sistemas informáticos facilitan la aplicación de los métodos numéricos y, en general, no se requiere de la solución a mano de los métodos numéricos. Sin embargo, en particular para los profesionales de las ciencias computacionales, la aplicación de los métodos numéricos no sólo se limita al diseño de modelos, sino también al diseño de programas que beneficien a otras ramas de la ingeniería.

El propósito del presente folleto es brindarles a los estudiantes una herramienta para el estudio de las diferentes técnicas que se estudiarán en la materia de Métodos Numéricos para Ingenieros, mediante la descripción de conceptos fundamentales y el desarrollo de ejemplos que ayuden en la comprensión de las reglas y pasos a seguir para cada método.

Capítulo I: Las principales causas de los errores en la representación interna de los datos

Aritmética del computador

La computadora permite representar modelos del mundo real. Sin embargo, para poder solucionar esos modelos es imprescindible comprender cómo la computadora almacena los números en la memoria y cómo realiza operaciones con esos datos.

En la primera sección del Capítulo I se describirán los diversos aspectos que conforman la aritmética de la computadora. Se estudiará la diferencia entre tres conceptos importantes en la representación interna de los números: precisión, exactitud y magnitud. Posteriormente, se explicará la aritmética de punto fijo y de punto flotante, para los cuales, adicionalmente, se presentarán ejemplos para facilitar la comprensión de estos temas.

Representación interna de números

Las **matemáticas aplicadas** son un rama de las matemáticas que se dedica a estudiar aquellos problemas del mundo real, para lo cual sigue las fases de resolución de problemas (Figueras, 2014):

1. Dado un problema, formular un modelo matemático que lo describa.
2. A través de métodos numéricos o analíticos, resolver el modelo.
3. Comparar los resultados del modelo con resultados experimentales. Si hay diferencias cualitativas, empezar nuevamente y reformular el problema.

En este sentido, las matemáticas aplicadas se dedican a buscar y aplicar las herramientas más adecuadas para resolver los problemas del mundo real, basados en **modelos**. Sin embargo, esto no siempre es posible por razones como:

- No se adecúan al modelo concreto.
- Su aplicación resulta excesivamente compleja.
- No es viable una solución formal por ser complicada su interpretación posterior.
- No existen métodos analíticos capaces de proporcionar soluciones al problema.

Considerando la descripción anterior, los métodos numéricos constituyen una de esas herramientas que apoyan al estudio de las matemáticas aplicadas y por ello, son de gran importancia en el estudio de las ingenierías y principalmente en las ciencias computacionales. Cada método numérico constituye un conjunto de algoritmos que permiten resolver el modelo de un problema matemático, a partir de la información dada y conociendo un determinado límite de error (Khoury & Harder, 2016).

Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente exactos para que satisfagan los requerimientos de un determinado problema de ingeniería. Como explica (Khoury & Harder, 2016), ninguno de los métodos numéricos permite encontrar una solución perfecta y exacta a los problemas, sino soluciones aproximadas con un rango de error conocido; sin embargo, en ingeniería se deben diseñar sistemas que toleren errores y que sean lo suficientemente precisos para que sean adecuados para el diseño de esos sistemas.

Precisión y exactitud

Dos conceptos que se deben definir dentro del estudio de los métodos numéricos son el de **precisión** y **exactitud**. (Khoury & Harder, 2016) define estos conceptos:

- **Precisión:** Se refiere a la cantidad de dígitos que una aproximación usa para representar un valor real.
- **Exactitud:** Se refiere a qué tan cercano se encuentra una aproximación de un valor real.

Considere el siguiente ejemplo: Un auto que se maneja a una velocidad constante de *90 km/h*, tiene dos tiene dos velocímetros para medir la velocidad: uno digital y uno análogo. El velocímetro digital indica que el valor de la velocidad del auto oscila entre *85.5* y *90.6 km/h* y el velocímetro análogo indica que la velocidad tiene un valor que oscila entre *82* y *90 km/h*. En este caso, *el velocímetro digital es más preciso que el velocímetro análogo* porque el velocímetro digital indica el valor de la velocidad con mayor cantidad de dígitos. Sin embargo, *el velocímetro análogo es más exacto* porque el valor que indica es más cercano al valor real de *90 km/h*.

Magnitud

La **magnitud** es una propiedad que poseen los fenómenos o las relaciones entre ellos, que permite que puedan ser **medidos**. La magnitud se representa por una cantidad, que se expresa en números reales no negativos y usando la unidad pertinente. Como ejemplos de magnitudes se mencionan: la temperatura, la masa, la longitud, entre otras.

Una magnitud es el resultado de una medición. La magnitud de cualquier número ***x*** se denomina usualmente su “valor absoluto”, indicado por **|*x*|**.

Aritmética de punto fijo

Como describe (Khoury & Harder, 2016), representación de punto fijo consiste en almacenar un número real como una cantidad fija de dígitos, antes y después del punto, incluyendo el signo, el cual se representa con un *0* si el número es positivo y con un *1* si el número es negativo. Considerando esto, la representación de punto fijo consta de tres campos: un signo, la parte entera y la parte decimal.

Los sistemas de numeración que principalmente se utilizan dentro de la representación de punto fijo son el **sistema decimal** y el **sistema binario**.

El **sistema decimal** es aquel se utiliza en la vida cotidiana y es de base 10. Utiliza los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

El **sistema binario** es de base 2 y utiliza dos símbolos: el 1 y el 0.

Una computadora recibe información en el sistema decimal. Luego, internamente, la transforma al sistema binario y realiza las operaciones correspondientes, para finalmente brindarle al usuario el resultado en el sistema decimal.

Para **transformar un número representado en el sistema decimal al sistema binario**, se siguen los siguiente se debe ir dividiendo el número decimal entre dos y anotar en una columna a la derecha de este número, el residuo. Cuando el dividendo sea un número par, el residuo será 0 y cuando el dividendo sea un número impar, el residuo será 1. Finalmente, para obtener el número binario se deben tomar los residuos desde el último residuo obtenido hasta el primer residuo obtenido.

Ejemplo #1: Transformar el número decimal 354 en número binario.

- **Solución:**

354	0
177	1
88	0
44	0
22	0
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

El número binario se lee desde el último residuo obtenido hasta llegar al primero, como indica la flecha de color rojo. Se obtiene que el número decimal **354** se representa de la siguiente forma en el sistema binario:

$$354_{10} = 101100010_2$$

Para **transformar un número representado en el sistema binario al sistema decimal**, se empieza por enumerar los dígitos binarios de derecha a izquierda. Empezando la enumeración desde 0, a cada dígito se le asigna una potencia de base 2. Luego se resuelve cada potencia y se suman los resultados y se multiplica el resultado por el dígito binario correspondiente. Finalmente se suman estos resultados para obtener el número en sistema decimal.

Ejemplo #2: Considerando el número binario del Ejemplo #1, transformarlo a un número en el sistema decimal.

- **Solución:**

256	128	64	32	16	8	4	2	0
2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	1	0	0	0	1	0

Las potencias de base 2 se asignan de derecha a izquierda (indicadas en color rojo) y estas se resuelven (indicadas en color verde). Al multiplicar los resultados de las potencias con su correspondiente dígito binario, se obtiene la siguiente suma:

$$256 + 0 + 64 + 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 = \mathbf{354}$$

Se obtiene que el número binario 101100010 se representa de la siguiente forma en el sistema decimal:

$$101100010_2 = 354_{10}$$

Para denotar los números positivos y negativos, el computador reserva un bit para denotar el signo de un número o bien, algunas computadoras almacenan los números negativos en forma de su complemento aritmético. Estos complementos se pueden usar para reducir la sustracción a una adición.

Existen dos tipos de complementos: el **complemento a la base** y el **complemento a la base menos uno**. Estos sistemas de representación son de sumo interés, ya que reducen la complejidad de la unidad aritmético-lógica.

El **complemento a la base menos uno de un número N** es el número que resulta de restar cada una de las cifras del número N a la base menos uno del sistema de numeración que se esté utilizando.

El **complemento a la base de un número N** es el número que resulta de restar cada una de las cifras del número N a la base menos uno del sistema que se esté utilizando y posteriormente, sumar uno a la diferencia obtenida.

Complemento en el Sistema Decimal

El complemento decimal se utiliza en los cálculos que involucran números decimales. En el sistema decimal, el cálculo de los complementos se realiza en función de la base que es 10. Considerando esto, los complementos se realizan de la siguiente forma:

- Complemento a la base menos uno → complemento a nueves
- Complemento a la base → Complemento a dieces

Ejemplo #1: Calcular el complemento a nueves y dieces de **25**.

- **Cálculo del complemento a nueves:**

$$\begin{array}{rr} & 99 \\ - & 25 \\ \hline & \mathbf{74} \end{array}$$

- **Cálculo del complemento a dieces:**

$$\begin{array}{rr} & 74 \\ + & 1 \\ \hline & \mathbf{75} \end{array}$$

Con los resultados anteriores, entonces se concluye que para el número **25**, el complemento a nueves es **74** y el complemento a dieces es **75**.

Ejemplo #2: Calcular el complemento a nueves y dieces de 7520.

- **Cálculo del complemento a nueves:**

$$\begin{array}{rr} & 9999 \\ - & 7520 \\ \hline & \mathbf{2479} \end{array}$$

- **Cálculo del complemento a dieces:**

$$\begin{array}{rr} & 2479 \\ + & 1 \\ \hline & \mathbf{2480} \end{array}$$

Con los resultados anteriores, entonces se concluye que para el número **7520**, el complemento a nueves es **2479** y el complemento a dieces es **2480**.

También se pueden realizar operaciones de dos números de la forma **Y = B – A** y se pueden distinguir dos casos: cuando **A < B** y cuando **A > B**. Estas operaciones se pueden solucionar de dos maneras:

1. Sumando al minuendo el complemento a nueves del sustraendo. La cifra que se arrastra del resultado (desbordamiento) se suma al resultado obtenido.

   Ejemplo → Caso #1 – A < B: Evaluar la diferencia de Y = B – A, donde A = 390 y B = 557.

   - **Solución:** Primero se obtiene el complemento a nueves del minuendo, es decir **A**:

$$\begin{array}{rrcl} & 999 & & \\ - & 390 & \rightarrow & \mathbf{A} \\ \hline & 609 & \rightarrow & \mathbf{C_{9s}A} \end{array}$$

     Luego se suma el complemento a nueves de **A** a **B**:

$$\begin{array}{rrcl} & 557 & \rightarrow & \mathbf{B} \\ + & 609 & \rightarrow & \mathbf{C_{9s}A} \\ \hline & \cancel{1}166 & \rightarrow & \cancel{1} \text{ se desborda} \end{array}$$

     Al resultado obtenido, sin el desbordamiento, se le suma **1**:

$$\begin{array}{rr} & 166 \\ + & 1 \\ \hline & \mathbf{167} \end{array}$$

     Se obtiene que el resultado es **Y = 167**.

2. Sumando el complemento a dieces de **A** a **B**.

Ejemplo → Caso #1 – A < B: Evaluar la diferencia de Y = B – A, donde A = 390 y B = 557.

- **Solución:** Primero se obtiene el complemento a nueves del minuendo, es decir **A**:

$$\begin{array}{rrll} & 999 & & \\ - & 390 & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ \hline & 609 & \longrightarrow & \mathbf{C_{9s}A} \end{array}$$

Luego se obtiene el complemento a dieces de **A**:

$$\begin{array}{rrll} & 609 & \longrightarrow & \mathbf{C_{9s}A} \\ + & 1 & & \\ \hline & 610 & \longrightarrow & \mathbf{C_{10s}A} \end{array}$$

Sumar el complemento a dieces de **A** a **B**:

$$\begin{array}{rrll} & 557 & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ + & 610 & \longrightarrow & \mathbf{C_{10s}A} \\ \hline & \cancel{1}167 & \longrightarrow & \cancel{1} \text{ se desborda} \end{array}$$

Se obtiene que el resultado es **Y = 167**.

Ejemplo → Caso #2 – A > B: Evaluar la diferencia de Y = B – A, donde A = 894 y B = 321.

- **Solución:** Primero se obtiene el complemento a dieces del minuendo, es decir **A**:

$$\begin{array}{rrll} & 999 & & \\ - & 894 & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ \hline & 105 & \longrightarrow & \mathbf{C_{9s}A} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrll} & 105 & \longrightarrow & \mathbf{C_{9s}A} \\ + & 1 & & \\ \hline & 106 & \longrightarrow & \mathbf{C_{10s}A} \end{array}$$

Sumar el complemento a dieces de **A** a **B**:

	321	→ **B**
+	106	→ **C_{10s}A**
	427	→ ~~1~~ se desborda

Como no hay desbordamiento, el resultado se resta de una posición mayor al valor obtenido. En este caso, **1000**, y al resultado se le coloca el signo negativo:

$$\begin{array}{rr} & 1000 \\ - & 427 \\ \hline & 573 \end{array}$$

Se obtiene que el resultado es **Y = - 573**.

Al restar **Y = B – A**, siempre se presenta desbordamiento cuando **A** es menor que **B** y estamos sumando el complemento de **A** a **B**. El **desbordamiento** es aquella parte del resultado de una operación, que se pierde porque el valor del resultado excede la capacidad de las posiciones de memoria.

Complemento en el Sistema Binario

En el sistema decimal, el cálculo de los complementos se realiza en función de la base que es 2. Considerando esto, los complementos se realizan de la siguiente forma:

- Complemento a la base menos uno → complemento a unos
- Complemento a la base → Complemento a doses

Para el cálculo de estos complementos, es necesario recordar lo siguiente:

Suma binaria	Resta binaria
0 + 0 = 1	0 – 0 = 0
0 + 1 = 1	0 – 1 = 1 y acarreo 1
1 + 0 = 1	1 – 0 = 1
1 + 1 = 0 y acarreo 1	1 – 1 = 0

Ejemplo #1: Calcular el complemento a unos del número A = 11001.

- **Solución:** Para obtener el complemento a unos de un número **A**, se debe restar 1 a cada dígito, como se muestra a continuación:

	11111	
+	11001	→ **A**

$$\begin{array}{rcl} \hline \mathbf{00110} & \longrightarrow & \mathbf{C_{1s}A} \end{array}$$

Observe que el complemento a unos se puede obtener invirtiendo cada dígito, es decir, reemplazando los ceros por unos y los unos por ceros.

Ejemplo #2: Calcular el complemento a doses del número A = 11001.

- **Solución:** Para obtener el complemento a unos de un número **A**, se debe obtener el complemento a unos del número y sumarle uno a este complemento. A continuación se muestra primero el cálculo del complemento a unos:

$$\begin{array}{rrcl} & 11111 & & \\ + & 11001 & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ \hline & 00110 & \longrightarrow & \mathbf{C_{1s}A} \end{array}$$

El siguiente paso es tomar el complemento a unos y sumarle uno, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rrcl} & 00110 & \longrightarrow & \mathbf{C_{1s}A} \\ + & 1 & & \\ \hline & \mathbf{111} & \longrightarrow & \mathbf{C_{2s}A} \end{array}$$

Para hacer operaciones de restas, estas se realizan sumando el complemento a doses.

Ejemplo → Caso #1 – A < B: Evaluar la diferencia Y= B – A, donde A = 10011 y B = 10111.

- **Solución:** Primero se calcula el complemento a unos de **A**:

$$\begin{array}{rcl} 10011 & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ \hline 01100 & \longrightarrow & \mathbf{C_{1s}A} \end{array}$$

Luego se obtiene el complemento a doces de **A**:

$$\begin{array}{rrcl} & 01100 & \longrightarrow & \mathbf{C_{1s}A} \\ + & 1 & & \\ \hline & 01101 & \longrightarrow & \mathbf{C_{2s}A} \end{array}$$

El siguiente paso consiste en sumar el complemento a doces de **A** a **B**:

	1	1	1	1	1			Suma
		1	0	1	1	1		Acarreo
		0	1	0	0			
+		0	1	1	0	1	→	B
	~~1~~	0	0	1	0	0		

Se obtiene que el resultado es **Y = 00100**.

Ejemplo → Caso #2 – A > B: Evaluar la diferencia Y= B – A, donde A = 101001 y B = 100010.

- **Solución:** Primero se calcula el complemento a unos de **A**:

101001	→	A
010110	→	$C_{1s}A$

Luego se obtiene el complemento a doces de **A**:

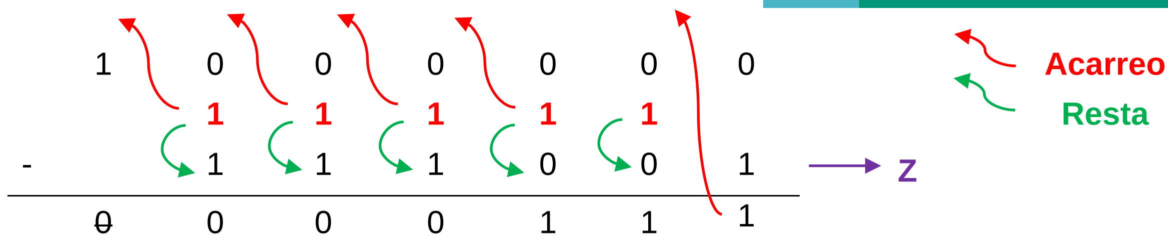
	010110	→	$C_{1s}A$
+	1		
	010111	→	$C_{2s}A$

El siguiente paso consiste en sumar el complemento a doces de **A** a **B**:

			1	1					Suma
	1	0	0	0	1	0	→	B	Acarreo
			1	1					
+	0	1	0	1	1	1	→	$C_{2s}A$	
	1	1	1	0	0	1	→	Z	

Como no hay desbordamiento, esto indica que **Z** no es el resultado final de la operación. Para obtener el resultado de la operación, se debe restar el resultado anterior (Z) de una posición mayor al valor obtenido. En este caso, será **1000000**:

1	1	1	1	1	1	Resta



Se obtiene que el resultado es **Y = - 000111**.

Operaciones con punto flotante normalizado

Los números reales se representan en la computadora utilizando la notación científica. De esta forma, se pueden representar números reales utilizando unos pocos dígitos sobre un amplio rango de valores (Santamaría, 2009). Esta forma de representación se le conoce como **punto flotante** y permite trabajar con números demasiado grandes o pequeños. Se generaliza de la siguiente forma:

$$n = f \times 10^{e} \longrightarrow$$

Donde:

- n es el número real
- f es la fracción o mantisa
- e es un entero positive o negativo llamado exponente.

Ejemplos:

Número	Número en formato de punto flotante
2.73	2.73×10^{0}
0.0007	7.0×10^{-4}
1857	1.857×10^{3}

Es importante recordar que al correr el punto hacia la derecha, las posiciones se incrementan en forma positiva y por lo tanto, el exponente será positivo. Por otro lado, al correr el punto hacia la izquierda, las posiciones se decrementan en forma negativa y por lo tanto, el exponente será negativo.

Al normalizar, lo que se hace es colocar el primer dígito diferente de cero después del punto decimal, ajustando el exponente a este nuevo número.

Adición y sustracción

A continuación, se describen las reglas para realizar las operaciones de adición y sustracción de dos números en punto flotante:

Regla #1. Si dos números tienen el mismo exponente, las mantisas se suman y usan el mismo exponente.

Ejemplo #1: Realizar la suma de $1.2657 \times 10^5 + 3.2214 \times 10^5$

- **Solución:**

$$1.2657 \times 10^5 + 3.2214 \times 10^5$$
$$= (1.2657 + 3.2214) \times 10^5$$
$$= \mathbf{4.4871 \times 10^5}$$

Ejemplo #2: Realizar la resta de $0.6589 \times 10^{-3} - 0.2234 \times 10^{-3}$

- **Solución:**

$$0.6589 \times 10^{-3} - 0.2234 \times 10^{-3}$$
$$= (0.6589 - 0.2234) \times 10^{-3}$$
$$= \mathbf{0.4355 \times 10^{-3}}$$

Regla #2. Si dos números tienen exponente diferentes, entonces uno de los números debe renormalizarse de tal manera que ambos tengan el mismo exponente antes de que se realice la operación. Por lo general, la computadora ajusta el exponente más pequeño.

Ejemplo #1: Realizar la suma de $0.2657 \times 10^3 + 1.2954 \times 10^5$

- **Solución:**

$$0.2657 \times 10^3 + 1.2954 \times 10^5$$
$$= 0.002657 \times 10^5 + 1.2954 \times 10^5$$
$$= (0.002657 + 1.2954) \times 10^5$$
$$= \mathbf{1.298057 \times 10^5}$$

Al truncar a 4 dígitos después del punto, se obtiene:

$$\approx \mathbf{1.2980 \times 10^5}$$

Ejemplo #2: Realizar la resta de $0.8972 \times 10^6 - 2.1192 \times 10^3$

- **Solución:**

$0.8972 \times 10^6 - 2.1192 \times 10^3$

$= 0.8972 \times 10^6 - 0.0021192 \times 10^6$

$= (0.8972 - 0.0021192) \times 10^6$

$= \mathbf{0.8950808 \times 10^6}$

Al truncar a 4 dígitos después del punto, se obtiene:

$$\approx \mathbf{0.8950 \times 10^6}$$

Multiplicación

Para realizar la operación de multiplicación, se deben multiplicar las mantisas y luego sumar los exponentes.

Ejemplo #1: Realizar la multiplicación de 3.2615×10^4 y 0.1123×10^2

- **Solución:**

$(3.2615 \times 10^4) \times (0.1123 \times 10^2)$

$= (3.2615 \times 0.1123) \times 10^{4+2}$

$= \mathbf{0.36626645 \times 10^6}$

Al truncar a 4 dígitos después del punto, se obtiene:

$$\approx \mathbf{0.3662 \times 10^6}$$

Ejemplo #2: Realizar la multiplicación de 1.2115×10^{-3} y 0.1923×10^2

- **Solución:**

$(1.2115 \times 10^{-3}) \times (0.1923 \times 10^2)$

$= (1.2115 \times 0.1923) \times 10^{-3+2}$

$= \mathbf{0.23297145 \times 10^{-1}}$

Al truncar a 4 dígitos después del punto, se obtiene:

$$\approx \mathbf{0.2329 \times 10^{-1}}$$

División

Para realizar la operación de división, se deben dividir las mantisas y luego restar los exponentes.

Ejemplo #1: Realizar la multiplicación de 0.2233×10^5 entre 0.1921×10^2

- **Solución:**

$$(0.2233 \times 10^5) \div (0.1921 \times 10^2)$$
$$= (0.2233 \div 0.1921)\ 10^{5-2}$$
$$= \mathbf{1.1624 \times 10^3}$$

Ejemplo #2: Realizar la multiplicación de 0.1105×10^{-3} y 0.3253×10^2

- **Solución:**

$$(0.1105 \times 10^{-3}) \div (0.3253 \times 10^2)$$
$$= (0.1105 \div 0.3253)\ 10^{-3-2}$$
$$= \mathbf{0.3396 \times 10^{-5}}$$

Teoría de error

El estudio de la teoría de error es imprescindible dentro del estudio de los métodos numéricos, ya que, al ser utilizados en la solución de modelos de la vida real, la existencia de errores en los cálculos puede generar consecuencias graves.

En la segunda sección del Capítulo I se definirá el concepto de error y se describirán los diferentes tipos de errores. Posteriormente, se describirán las distintas formas de medir el error y finalmente, se describirá el cálculo del error en series de potencias, a través de la serie de expansión de Taylor. Todos los puntos de esta sección se expondrán con ejemplos.

Tipos de errores

La computadora almacena un número limitado de cifras significativas. La mayoría de los valores numéricos almacenados y de cálculo son sólo aproximaciones de los valores verdaderos. En algunos casos, estas aproximaciones presentan cierta discrepancia o error que en los cálculos numéricos es ventajoso conocer.

El concepto de cifras significativas se ha desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico. Las cifras significativas de un número son aquellas que pueden utilizarse en forma confiable. Este concepto tiene dos implicaciones importantes en el estudio de los métodos numéricos:

a. Para especificar qué tan confiables son dichos resultados.
b. Cuando las cantidades no se pueden expresar exactamente con un número finito de números.

Un **error** es un valor que es inexacto (Khoury & Harder, 2016). Esto quiere decir, que un valor erróneo es un valor que difiere en cierta medida de un valor real.

Como explica (Chapra & Canale, 2015), muchos problemas de aplicación en ingeniería no se pueden resolver a través de métodos analíticos y por lo tanto, se deben utilizar métodos numéricos, los cuales llevan asociados errores que no se pueden calcular con exactitud. Por ello, se deben utilizar aproximaciones para la representación de operaciones y cantidades matemáticas exactas; sin embargo, el uso de aproximaciones puede dar lugar a errores numéricos.

Error por redondeo

El **error por redondeo** es aquel tipo de error en donde el número significativo de cifras después del punto decimal se ajusta a un número específico, provocando con ello un ajuste en la última cifra que se toma en cuenta.

Los errores por redondeo se deben a que la computadora sólo puede presentar cantidades con número finito de cifras (Chapra & Canale, 2015) y por ello, se debe prescindir de un cierto número de cifras significativas. Este ajuste se hace sobre la última cifra no descartada.

Un ejemplo de esto, es el valor de la constante matemática *pi*, la cual tiene un valor de 3.141592653 y se puede redondear a 3.1416.

Existen dos reglas de redondeo que se aplican al decimal situado en la siguiente posición al número de decimales que se quiere transformar:

1. **Dígito menor que 5:** Si el siguiente decimal es menor que 5, el anterior no se modifica.
   Ejemplo: Redondear a 3 decimales el número 3.5541.
   - **Solución:** Tomando en cuenta el cuarto decimal, indicado en color rojo:

     3.554**1**

     Se obtiene que el valor redondeado es:

     3.554

2. **Dígito mayor que 5:** Si el siguiente decimal es mayor o igual que 5, el anterior se incrementa en una unidad.
   Ejemplo #1: Redondear a 3 decimales el número 23.4567.
   - **Solución:** Tomando en cuenta el tercer decimal, indicado en color rojo:

     23.456**7**

     Se obtiene que el valor redondeado es:

     23.457

   Ejemplo #2: Redondear a 2 decimales el número 6.335.
   - **Solución:** Tomando en cuenta el tercer decimal, indicado en color rojo:

     6.33**5**

     Se obtiene que el valor redondeado es:

     6.34

Error por truncamiento

Truncar es el término que se utiliza para reducir el número de dígitos a la derecha del punto decimal, descartando los menos significativos.

El **error por truncamiento** se presenta cuando los cálculos aritméticos en la computadora resultan con más dígitos de los que se pueden almacenar en la memoria. Debido a esto, las computadoras se programan de modo que supriman los dígitos menos significativos.

Para truncar los números o dígitos decimales, en nuestro caso, solo se consideran los cuatro dígitos a la derecha del punto decimal.

Ejemplos:

Número sin truncar	Número truncado
3.141592653	3.1415
23.667891	23.6678
0.023469	0.0234

Error significativo

El **error significativo** es aquel en donde el número de cifras significativas es algunas veces menor de lo esperado. Ocurre con mayor frecuencia cuando se restan números casi iguales, pero también puede ocurrir cuando varios números de magnitud y signo diferentes se suman o cuando se emplea un divisor relativamente pequeño.

Error propagado

El **error propagado** se define como el error en la salida provocado por un error en la entrada, suponiendo que todos los cálculos intermedios se efectúan exactamente. En una situación realista todos los tipos de errores pueden intervenir de modo que la salida de un proceso contendrá el error propagado más los errores generados en el proceso.

Formas de medir el error

A continuación, se describen las dos formas que existen para medir el error.

Error absoluto

El **error absoluto** es la diferencia entre el valor de la medida y el valor real de una magnitud (valor tomado como exacto). El error absoluto se define como:

$$E_a = |V_v - V_a|$$

Donde:

- V_v es el valor verdadero
- V_a es el valor aproximado

El error absoluto se expresa en las unidades utilizadas en la medición (Khoury & Harder, 2016).

Ejemplo: Un estudiante realiza una medición del ancho de una hoja de papel utilizando una regla. El valor verdadero indicado por el fabricante es de 21.59 cm, sin embargo en la medición el estudiante obtiene un valor 21.6 cm. Calcular el error absoluto.

- **Solución:**

V_v = 21.59 cm
V_a = 21.56 cm

$$E_a = |21.59 - 21.6|$$

$$E_a = |-0.01|$$

$$\boldsymbol{E_a = 0.01\ cm}$$

Error relativo modificado

El **error relativo** es la relación que existe entre el error absoluto y la magnitud medida.

El error relativo se define como:

$$E_r = \frac{V_v - V_a}{V_v} = \frac{E_a}{V_a}$$

Donde:
- V_v es el valor verdadero
- V_a es el valor aproximado

El error relativo modificado se define como:

$$E_r = 2\left(\frac{V_v - V_a}{V_v + V_a}\right)$$

Donde:
- V_v es el valor verdadero
- V_a es el valor aproximado

A diferencia del error absoluto, el error relativo suele expresarse en porcentaje (Khoury & Harder, 2016).

Ejemplo: Un estudiante compra un producto alimenticio cuyo fabricante indica que el peso es de 256.45 g. Sin embargo, en su casa el estudiante utiliza una pesa análoga y obtiene que el producto alimenticio pesa 256 g. Calcular el error relativo modificado.

- **Solución:**

V_v = 256.45 g
V_a = 256 g

$$E_r = 2\left(\frac{256.45 - 256}{256.45 + 256}\right)$$

$$E_r = 2(0.0009)$$

$$\boldsymbol{E_r = 0.0018 = 0.18\%}$$

Cálculo de error en series de potencias

La serie de Taylor proporciona un medio para predecir el valor de una función en un punto, en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto (Chapra & Canale, 2015). Esta serie sirve para estimar los errores de truncamiento. En general, se considera que el error de truncamiento disminuye agregando términos a la serie de Taylor.

La fórmula general es:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n$$

en donde: $h = x_{i+1} - x_i$

con un error de truncamiento:

$E_t = V_v - V_a$ → Donde:

- V_v es el valor verdadero
- V_a es el valor aproximado

A continuación se presenta un ejemplo, propuesto por (Chapra & Canale, 2015).
Ejemplo: Usar la expansión de la serie de Taylor desde cero hasta cuatro para aproximar la siguiente función, desde $x_i = 0$ con $h = 1$. Estime el valor de la función en $x_{i+1} = 1$.

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

- **Solución:**
  Primero se calcula el valor verdadero de la función, es decir, el valor exacto que se intenta predecir. Para ello, se toma la función original y se reemplazan las x por el valor de estimación indicado en el problema $x_{i+1} = 1$.

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$
$$f(1) = -0.1(1)^4 - 0.15(1)^3 - 0.5(1)^2 - 0.25(1) + 1.2$$
$$f(1) = 0.2$$

El valor verdadero se utiliza para ir calculando el error de truncamiento a lo largo del desarrollo del problema y debe ser cero.

A continuación, se calculan los términos de la función. Como el problema indica que la expansión debe usarse desde cero hasta cuatro, se deben calcular los términos desde $n = 0$ hasta $n = 4$ y utilizando $x_i = 0$. En otras palabras, se deberá utilizar la función original hasta la cuarta derivada y reemplazando las x por $x_i = 0$. Además, para cada término de la serie que se calcule, se debe obtener también el error de truncamiento.

Primero se obtienen las derivadas de la función original:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$
$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25$$
$$f''(x) = -1.2x^2 - 0.9x^3 - 1$$
$$f'''(x) = -2.4x - 0.9$$
$$f^4(x) = -2.4$$

El primer término de la serie está dado por $f(x_i)$, por lo que se usa la función original. Para $n = 0$ y $x_i = 0$:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$
$$f(0) = -0.1(0)^4 - 0.15(0)^3 - 0.5(0)^2 - 0.25(0) + 1.2$$
$$f(0) = 1.2$$

entonces, $\boldsymbol{f(x_i) = 1.2}$. Calculando el error de truncamiento:

$$E_t = V_v - V_a$$
$$E_t = 0.2 - 1.2$$
$$\boldsymbol{E_t = -1.0}$$

Para calcular el segundo término de la serie, tomando la primera derivada de la función, para $n = 1$ y $x_i = 0$:

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25$$
$$f'(0) = -0.4(0)^3 - 0.45(0)^2 - (0) - 0.25$$
$$f'(0) = -0.25$$

entonces, $\boldsymbol{f'(x_i) = -0.25}$. Reemplazando en la serie de Taylor hasta el segundo término:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h$$
$$f(x_{i+1}) = 1.2 + (-0.25)(1)$$
$$f(x_{i+1}) = 0.95$$

Calculando el error de truncamiento:

$$E_t = V_v - V_a$$
$$E_t = 0.2 - 0.95$$
$$\boldsymbol{E_t = -0.75}$$

Para calcular el tercer término de la serie, tomando la segunda derivada de la función, para $n = 2$ y $x_i = 0$:

$$f''(x) = -1.2x^2 - 0.9x^3 - 1$$
$$f''(x) = -1.2(0)^2 - 0.9x(0)^3 - 1$$

$f''(0) = -1.0$

entonces, $\boldsymbol{f''(x_i) = -1.0}$. Reemplazando en la serie de Taylor hasta el tercer término:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$$
$$f(x_{i+1}) = 1.2 - 0.25 + \frac{(-1.0)}{2}(1)^2$$
$$f(x_{i+1}) = 1.2 - 0.25 - 0.5$$
$$f(x_{i+1}) = 0.45$$

Calculando el error de truncamiento:

$$E_t = V_v - V_a$$
$$E_t = 0.2 - 0.45$$
$$\boldsymbol{E_t = -0.25}$$

Para calcular el cuarto término de la serie, tomando la tercera derivada de la función, para $n = 3$ y $x_i = 0$:

$$f'''(x) = -2.4x - 0.9$$
$$f'''(0) = -2.4(0) - 0.9$$
$$f'''(0) = -0.9$$

entonces, $\boldsymbol{f'''(x_i) = -0.9}$. Reemplazando en la serie de Taylor hasta el cuarto término:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3$$
$$f(x_{i+1}) = 1.2 - 0.25 - 0.5 + \frac{(-0.9)}{6}(1)^3$$
$$f(x_{i+1}) = 1.2 - 0.25 - 0.5 - 0.15$$
$$f(x_{i+1}) = 0.3$$

Calculando el error de truncamiento:

$E_t = V_v - V_a$
$E_t = 0.2 - 0.3$
$\boldsymbol{E_t = -0.1}$

Para calcular el cuarto término de la serie, tomando la tercera cuarta derivada de la función, para $n = 4$ y $x_i = 0$:

$f^4(x) = -2.4$
$f^4(0) = -2.4$

entonces, $\boldsymbol{f^4(x_i) = -2.4}$. Reemplazando en la serie de Taylor hasta el quinto término:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{f^4(x_i)}{4!}h^4$$
$$f(x_{i+1}) = 1.2 - 0.25 - 0.5 - 0.15 + \frac{(-2.4)}{24}(1)^4$$
$$f(x_{i+1}) = 1.2 - 0.25 - 0.5 - 0.15 + 0.1$$
$$f(x_{i+1}) = 1.2 - 0.25 - 0.5 - 0.15 - 0.1$$
$$f(x_{i+1}) = 0.2$$

Calculando el error de truncamiento:

$E_t = V_v - V_a$
$E_t = 0.2 - 0.2$
$\boldsymbol{E_t = 0}$

Capítulo II: Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentales

Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

Los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales se utilizan mucho en la resolución de problemas de ingeniería. Debido a esto, es conveniente estudiar diferentes métodos para resolverlos, así como comprender las diferencias entre métodos similares.

En la primera sección del Capítulo II se estudiarán cinco métodos para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Primero se describen dos métodos, el de eliminación gaussiana y el de Gauss-Jordan, los cuales se basan en la reducción de la matriz del sistema; luego, se describen dos métodos iterativos que son el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel. Finalmente, se describe un método basado en la factorización o descomposición de la matriz del sistema, el cual corresponde al método de Doolittle.

Todos los métodos se demostrarán con ejemplos, con el fin de facilitar la comprensión de cada uno de estos.

Definición

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de n ecuaciones con n variables desconocidas (Khoury & Harder, 2016), cuya forma general se muestra en la ***Figura 1***:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_{\mathrm{n}} + a_{n2}x_{\mathrm{n}} + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{gathered}
$$

Figura 1. Forma general de un sistema de ecuaciones lineales. Elaboración propia.

Este sistema puede escribirse de la forma matricial $Ax = b$ donde A es la matriz de coeficientes, x son las incógnitas y b son los términos independientes de cada una de las ecuaciones, de modo que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales se resuelven con el fin de encontrar una solución, que no es más que el cálculo de los valores de todas las incógnitas.

Método de eliminación Gaussiana

El **método de eliminación gaussiana** consiste en reducir la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones a la forma escalonada (matriz triangular superior), para despejar el valor de la última incógnita y finalmente, usar la sustitución hacia atrás para encontrar las demás incógnitas (Grossman & Flores Godoy, 2012).

Para lograr esto, se realiza la reducción de las filas de la matriz utilizando la eliminación hacia adelante. Para ello se pueden realizar cualquiera de las siguientes operaciones:

- **a.** Intercambiar el orden de las filas.
- **b.** Multiplicar cualquier fila por una constante.
- **c.** Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

A medida que se realizan estas operaciones, se irá obteniendo matrices. El proceso de eliminación hacia adelante finaliza cuando se obtiene una matriz triangular superior. Recordando cómo es este tipo de matrices, en la ***Figura 2*** se muestra un ejemplo. Observe que la triangular superior se indica en color rojo.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Figura 2. Ejemplo de una matriz triangular superior. Elaboración propia.

La última matriz obtenida es equivalente para el sistema de ecuaciones dado y a partir de esta, se puede utilizar la sustitución hacia atrás para despejar las incógnitas y obtener la solución para el sistema de ecuaciones. Se inicia con la última ecuación y este valor se reemplaza en la anterior, y así sucesivamente hasta obtener el valor de todas las incógnitas.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de eliminación gaussiana.

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$

$$3x_1 + 1x_2 - 2x_3 = 4$$

- **Solución:** Primero se obtiene la matriz del sistema de ecuaciones dado, colocando sólo los coeficientes. La matriz de este problema sería la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

A continuación, se realiza la eliminación hacia adelante, aplicando las operaciones necesarias:

$$\xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3\,F_1]{F_2 \to F_2 - 4\,F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + 5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Una vez se obtiene la matriz en forma escalonada, se pasa la matriz a un sistema de ecuaciones. Este sistema de ecuaciones es equivalente al dado inicialmente.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -x_3 &= -3 \end{aligned}$$

A partir de la última ecuación se despejan las otras ecuaciones para obtener la solución del problema:

$$-x_3 = -3$$
$$\boldsymbol{x_3 = 3}$$

$$x_2 + 2x_3 = -4$$
$$x_2 + 2(3) = -4$$
$$x_2 + 6 = -4$$
$$x_2 = -4 + 6$$
$$\boldsymbol{x_2 = -2}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$$
$$x_1 - 4 + 9 = 9$$
$$x_1 + 5 = 9$$
$$x_1 = 9 - 5$$
$$\boldsymbol{x_1 = 4}$$

Método de Gauss-Jordan

El **método de Gauss-Jordan** es similar al método de eliminación gaussiana, ya que se utiliza el proceso de eliminación hacia adelante. Sin embargo, la matriz de coeficientes se reduce a una matriz identidad. Recordando cómo es una matriz identidad, en la ***Figura 3*** se muestra un ejemplo donde se indica la diagonal principal en color rojo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3. Ejemplo de una matriz identidad. Elaboración propia.

Se debe iniciar por el primer elemento de la primera columna a la izquierda de la matriz. Si este elemento es cero, se intercambia la fila por otra que no tenga cero en la primera columna, de lo contrario, se debe hacer que este elemento sea uno.

Al realizar las operaciones del proceso de eliminación hacia adelante, se irán obteniendo matrices. El proceso finaliza cuando se obtiene la matriz identidad, la cual se utiliza para realizar la eliminación hacia atrás y así obtener la solución para el sistema de ecuaciones.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$$

- **Solución:** Primero se obtiene la matriz del sistema de ecuaciones dado, colocando sólo los coeficientes. La matriz de este problema sería la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

Como el primer elemento de la primera columna a la izquierda de la matriz es igual a 1, no es necesario intercambiar filas ni hacer que ese elemento sea uno. Se continúa con la eliminación hacia adelante:

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2\,F_1]{F_2 \to F_2 - 4\,F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{3} F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2\,F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 - 9F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to -\frac{1}{4} F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_3]{F_1 \to F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A partir de la matriz identidad, se pueden obtener los valores de las incógnitas. Estos valores se muestran a continuación:

$$\boldsymbol{x_1 = 2}$$
$$\boldsymbol{x_2 = -3}$$
$$\boldsymbol{x_3 = 1}$$

Método de Jacobi

El **método de Jacobi** consiste en usar ecuaciones de recurrencia para obtener valores iniciales como solución, los cuales se utilizarán en la siguiente iteración y así sucesivamente, hasta que en dos iteraciones consecutivas se obtenga un margen de error preestablecido.

Este método se utiliza con sistemas de ecuaciones cuyas matrices son cuadradas, es decir, que tienen igual cantidad de filas y columnas. Además, debe cumplirse que el sistema sea diagonalmente dominante para que se asegure una condición de convergencia. Una matriz diagonalmente dominante es aquella en la que el valor absoluto de cada coeficiente de la diagonal principal, es mayor que el valor absoluto de la suma de los otros coeficientes en esa fila (Gerald & Wheatley, 2004).

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Jacobi. Utilizar 5 decimales y un margen de error de 0.001.

$$10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$4x_1 + 6x_2 - x_3 = 9$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 51$$

- **Solución:** Primero se verifica que el sistema de ecuaciones esté ordenado de manera que, al convertirse en una matriz, esta sea diagonalmente dominante. En este caso, se cumple este criterio por lo que se procede a despejar las incógnitas para obtener las ecuaciones de recurrencia:

$$x_1 = \frac{1}{10}(-x_2 - 2x_3 + 3)$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4x_1 + x_3 + 9)$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2x_2 - 3x_3 + 51)$$

Como no se indican los valores iniciales para empezar el cálculo de las iteraciones, se asume que los valores iniciales son iguales a cero. Por lo tanto, en la **primera iteración** se parte de $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

$$x_1 = \frac{1}{10}(-(0) - 2(0) + 3) = 0.30000$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4(0) + (0) + 9) = 1.50000$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2(0) - 3(0) + 51) = 6.37500$$

En la segunda iteración, se utilizan los valores obtenidos en las incógnitas de la iteración anterior. Por lo tanto, en la **segunda iteración** se parte de $x_1 = 0.30000$, $x_2 = 1.50000$ y $x_3 = 6.37500$.

$$x_1 = \frac{1}{10}(-(1.50000) - 2(6.37500) + 3) = -1.12500$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4(0.30000) + (6.37500) + 9) = 2.36250$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2(0.30000) - 3(1.50000) + 51) = 5.88750$$

A continuación, se calcula el error relativo para cada una de las ecuaciones de recurrencia en la **segunda iteración**, para verificar si se cumple el margen de error dado por el problema:

$$Er_{x_1} = \left|\frac{(-1.12500) - (0.30000)}{(-1.12500)}\right| = 1.26667$$

$$Er_{x_2} = \left|\frac{(2.36250) - (1.50000)}{(2.36250)}\right| = 0.36508$$

$$Er_{x_3} = \left|\frac{(5.88750) - (6.37500)}{(5.88750)}\right| = 0.08280$$

- **Nota:** Para calcular el error relativo, se toman como valores aproximados a los obtenidos en la iteración anterior.

Como el margen de error menor a 0.001 no se cumple se procede con la siguiente iteración.

Utilizando los valores de la iteración anterior, en la **tercera iteración** se parte de $x_1 = -1.12500$, $x_2 = 2.36250$ y $x_3 = 5.88750$.

$$x_1 = \frac{1}{10}(-(2.36250) - 2(5.88750) + 3) = -1.11375$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4(-1.12500) + (5.88750) + 9) = 3.23125$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2(-1.12500) - 3(2.36250) + 51) = 5.20781$$

A continuación, se calcula el error relativo para cada una de las ecuaciones de recurrencia en la **tercera iteración**, para verificar si se cumple el margen de error dado por el problema:

$$Er_{x_1} = \left|\frac{(-1.11375) - (-1.12500)}{(-1.11375)}\right| = 0.01010$$

$$Er_{x_2} = \left|\frac{(3.23125) - (2.36250)}{(3.23125)}\right| = 0.26886$$

$$Er_{x_3} = \left|\frac{(5.20781) - (5.88750)}{(5.20781)}\right| = 0.13051$$

Como el margen de error menor a 0.001 no se cumple, se procede con la siguiente iteración.

Utilizando los valores de la iteración anterior, en la **cuarta iteración** se parte de $x_1 = -1.11375$, $x_2 = 3.23125$y $x_3 = 5.20781$.

$$x_1 = \frac{1}{10}(-(3.23125) - 2(5.20781) + 3) = -1.06469$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4(-1.11375) + (5.20781) + 9) = 3.11047$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2(-1.11375) - 3(3.23125) + 51) = 4.88484$$

A continuación, se calcula el error relativo para cada una de las ecuaciones de recurrencia en la **cuarta iteración**, para verificar si se cumple el margen de error dado por el problema:

$$Er_{x_1} = \left|\frac{(-1.06469) - (-1.11375)}{(-1.06469)}\right| = 0.04608$$

$$Er_{x_2} = \left|\frac{(3.11047) - (3.23125)}{(3.11047)}\right| = 0.03883$$

$$Er_{x_3} = \left|\frac{(4.88484) - (5.20781)}{(4.88484)}\right| = 0.06612$$

Como el margen de error menor a 0.001 no se cumple, se procede con las siguientes iteraciones hasta que se cumpla el margen de error entre dos iteraciones consecutivas. En la siguiente tabla se muestran los valores obtenidos desde la primera hasta la novena iteración, así como el correspondiente error relativo:

Iteración	x_1	Er_{x_1}	x_2	Er_{x_2}	x_3	Er_{x_3}
1	0.30000	-	1.50000	-	6.37500	-
2	−1.12500	1.26667	2.36250	0.36508	5.88750	0.08280
3	−1.11375	0.01010	3.23125	0.26886	5.20781	0.13051
4	−1.06469	0.04608	3.11047	0.03883	4.88484	0.06612
5	−0.98802	0.07759	3.02393	0.02862	4.94240	0.01165
6	−0.99087	0.00288	2.98241	0.01392	4.99402	0.01034
7	−0.99705	0.00619	2.99292	0.00351	5.00888	0.00297
8	−1.00107	0.00402	2.99951	0.00219	5.00339	0.00109
9	−1.00063	0.00044	3.00128	0.00059	4.99992	0.00069

Como se observa, el margen de error menor a 0.001 se obtiene en la novena iteración. Por lo tanto, la solución para el sistema de ecuaciones dado es el siguiente:

$$\boldsymbol{x_1 = -1.00063}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 3.00128}$$
$$\boldsymbol{x_3 = 4.99992}$$

Método de Gauss-Seidel

El **método de Gauss-Seidel** es similar al método de Jacobi, ya que también es un método iterativo. Sin embargo, en el método de Gauss-Seidel, los valores nuevos en cada iteración se van sustituyendo en las ecuaciones de recurrencia conforme se van obteniendo (Cortés Rosas, González Cárdenas, Pinilla Morán, Salazar Moreno, & Tovar

Pérez, 2019). Es decir, se utilizan los valores más recientes para ser reemplazados en las ecuaciones de recurrencia.

Al igual que sucede con el método de Jacobi, se debe cumplir que el sistema de ecuaciones sea diagonalmente dominante para que se asegure una condición de convergencia.

El sistema de ecuaciones que se presenta en el siguiente ejemplo, es el mismo que se presentó en el ejemplo del método de Jacobi. Observe las diferencias entre ambos métodos y las soluciones que se obtienen.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Seidel. Utilizar 5 decimales y un margen de error de 0.001.

$$10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$4x_1 + 6x_2 - x_3 = 9$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 51$$

- **Solución:** Verificando que el sistema de ecuaciones está ordenado de manera que al convertirse en una matriz sea diagonalmente dominante, se procede a despejar las incógnitas para obtener las ecuaciones de recurrencia:

$$x_1 = \frac{1}{10}(-x_2 - 2x_3 + 3)$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4x_1 + x_3 + 9)$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2x_2 - 3x_3 + 51)$$

Como no se indican los valores iniciales para empezar el cálculo de las iteraciones, se asume que los valores iniciales para el cálculo de la primera incógnita son iguales a cero. En la **primera iteración** se parte de $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ en el cálculo de la primera ecuación de recurrencia. En las siguientes ecuaciones de recurrencia, se parte del valor más reciente para cada una de las incógnitas:

$$x_1 = \frac{1}{10}(-(0) - 2(0) + 3) = 0.30000$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4(0.30000) + (0) + 9) = 1.30000$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2(0.30000) - 3(1.30000) + 51) = 5.96250$$

Observe que, en la segunda ecuación de recurrencia, se parte de $x_1 = 0.30000$ y en la tercera ecuación de recurrencia se parte de $x_1 = 0.30000$ y $x_2 = 1.30000$. En las siguientes iteraciones se realiza este mismo proceso de utilizar los valores más recientes.

Se continúa con el cálculo de la **segunda iteración**:

$$x_1 = \frac{1}{10}(-(1.30000) - 2(5.96250) + 3) = -1.02250$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4(-1.02250) + (5.96250) + 9) = 3.17542$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2(-1.02250) - 3(3.17542) + 51) = 4.92859$$

A continuación, se calcula el error relativo para cada una de las ecuaciones de recurrencia en la **segunda iteración**, para verificar si se cumple el margen de error dado por el problema:

$$Er_{x_1} = \left|\frac{(-1.02250) - (0.30000)}{(-1.02250)}\right| = 1.29339$$

$$Er_{x_2} = \left|\frac{(3.17542) - (1.30000)}{(3.17542)}\right| = 0.59061$$

$$Er_{x_3} = \left|\frac{(4.92859) - (5.96250)}{(4.92859)}\right| = 0.20978$$

- **Nota:** Para calcular el error relativo, se toman como valores aproximados a los obtenidos en la iteración anterior.

Como el margen de error menor a 0.001 no se cumple se procede con la siguiente iteración.

En la **tercera iteración** se obtiene lo siguiente:

$$x_1 = \frac{1}{10}(-(3.17542) - 2(4.92859) + 3) = -1.00326$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(-4(-1.00326) + (4.92859) + 9) = 2.99027$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(2(-1.00326) - 3(2.99027) + 51) = 5.00283$$

A continuación, se calcula el error relativo para cada una de las ecuaciones de recurrencia en la **tercera iteración**, para verificar si se cumple el margen de error dado por el problema:

$$Er_{x_1} = \left|\frac{(-1.00326) - (-1.02250)}{(-1.00326)}\right| = 0.01918$$

$$Er_{x_2} = \left|\frac{(2.99027) - (3.17542)}{(2.99027)}\right| = 0.06192$$

$$Er_{x_3} = \left|\frac{(5.00283) - (4.92859)}{(5.00283)}\right| = 0.01484$$

Como el margen de error menor a 0.001 no se cumple, se procede con la siguiente iteración hasta obtener el margen de error preestablecido entre dos iteraciones consecutivas. En la siguiente tabla se muestran los valores obtenidos desde la primera hasta la quinta iteración, así como el error relativo:

Iteración	x_1	Er_{x_1}	x_2	Er_{x_2}	x_3	Er_{x_3}
1	0.30000	-	1.30000	-	5.96250	-
2	-1.02250	1.29339	3.17542	0.59061	4.92859	0.20978
3	-1.00326	0.01918	2.99027	0.06192	5.00283	0.01484
4	-0.99959	0.00367	3.00019	0.00331	5.00003	0.00056
5	-1.00003	0.00044	3.00003	0.00005	4.99998	0.00001

Como se observa, el margen de error menor a 0.001 preestablecido se obtiene en la quinta iteración. Por lo tanto, la solución para el sistema de ecuaciones dado es el siguiente:

$$\boldsymbol{x_1 = -1.00003}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 3.00003}$$
$$\boldsymbol{x_3 = 4.99998}$$

Observe que la solución del sistema de ecuaciones con del método de Gauss-Seidel, es similar a la solución obtenida con del método de Jacobi. La principal diferencia es que al resolver el sistema de ecuaciones con el método de Gauss-Seidel se necesitaron menos iteraciones hasta obtener el margen de error preestablecido.

Método de Doolittle

El **método de Doolittle** consiste en descomponer una matriz A en un producto de dos matrices LU, de la siguiente manera:

$$A = LU \longrightarrow$$

Donde:

- L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal
- U es una matriz triangular superior

Recordando que un sistema de ecuaciones puede escribirse de la forma $Ax = b$, al descomponer en LU se tiene lo siguiente:

$$Ax = b$$
$$A = L \cdot U \Rightarrow LUx = b$$
$$Ly = b \qquad Ux = y$$

Donde:

- $Ly = b$ es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- $Ux = y$ es:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Después de descomponer A en LU, se obtiene el producto de las matrices LU. Para una matriz cuadrada A de 3x3 su descomposición en LU sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{21} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

a. Para realizar el cálculo del producto de LU se debe multiplicar el primer elemento de la primera fila de L por cada columna de U e igualarlo con la primera fila de A. De este modo se obtiene que:

$$a_{11} = u_{11}$$

$$a_{12} = u_{12}$$

$$a_{13} = u_{13}$$

b. Luego, se multiplica la segunda fila de L por cada columna de U y de igual manera, esto se iguala con la segunda fila de A. De este modo se obtiene que:

$$a_{21} = l_{21}u_{11}$$

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22}$$

$$a_{23} = l_{21}u_{13} + u_{23}$$

c. Finalmente, se multiplica la tercera fila de L por cada columna de U y de igual manera, esto se iguala con la tercera fila de A. De este modo se obtiene que:

$$a_{31} = l_{31}u_{11}$$

$$a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}$$

$$a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33}$$

Partiendo de u_{11}, u_{12} y u_{13}, se van sustituyendo en las otras ecuaciones para así calcular el valor de los elementos restantes de L y U. Posteriormente estas matrices se utilizan para obtener $Ly = b$ y se utiliza sustitución hacia adelante para calcular los valores de y y estos se utilizan para calcular $Ux = y$ utilizando sustitución hacia atrás.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Doolittle.

$$x_1 - 2 + 3x_3 = 11$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$$

- **Solución:** Se descompone el sistema de ecuaciones en la forma $A = LU$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{21} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

A continuación, se obtiene el producto de LU, con lo cual se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$1 = u_{11} \qquad 4 = lu_{11} \qquad 2 = l_{31}u_{11}$$

$$-2 = u_{12} \qquad 1 = l_{21}u_{12} + u_{22} \qquad -1 = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}$$

$$3 = u_{13} \qquad -1 = l_{21}u_{13} + u_{23} \qquad 3 = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33}$$

Partiendo de u_{11}, u_{12} y u_{13}, se van sustituyendo en las demás ecuaciones para obtener los elementos restantes de L y U.

$$4 = l_{21}u_{11} \qquad 1 = l_{21}u_{12} + u_{22} \qquad -1 = l_{21}U_{13} + u_{23}$$

$$4 = l_{21}(1) \qquad 1 = (4)(-2) + u_{22} \qquad -1 = (4)(3) + u_{23}$$

$$\mathbf{4 = l_{21}} \qquad 1 = -8 + u_{22} \qquad -1 = 12 + u_{23}$$

$$1 + 8 = u_{22} \qquad -1 - 12 = u_{23}$$

$$\mathbf{9 = u_{22}} \qquad \mathbf{-13 = u_{23}}$$

$$2 = l_{31}u_{11}$$
$$2 = l_{31}(1)$$
$$\mathbf{2 = l_{31}}$$

$$-1 = (2)(-2) + l_{32}(9)$$
$$-1 = (2)(-2) + l_{32}(9)$$
$$-1 = -4 + 9l_{32}$$
$$-1 + 4 = 9l_{32}$$
$$3 = 9l_{32}$$
$$\frac{3}{9} = l_{32}$$
$$\mathbf{\frac{1}{3} = l_{32}}$$

$$3 = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33}$$
$$3 = (2)(3) + (1/3)(-13) + u_{33}$$
$$3 = 6 - \frac{13}{3} + u_{33}$$
$$3 - 6 + \frac{13}{3} = u_{33}$$
$$\mathbf{\frac{4}{3} = u_{33}}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{21} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & -13 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}$$

A partir de la nueva matriz L, se obtiene $Ly = b$ y se utiliza sustitución hacia adelante para obtener los valores de y_1, y_2 y y_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Realizando sustitución hacia adelante, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{y_1 = 11}$$

$$4y_1 + y_2 = 4$$
$$4(11) + y_2 = 4$$
$$44 + y_2 = 4$$
$$y_2 = 4 - 44$$
$$\mathbf{y_2 = -40}$$

$$2y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 10$$
$$2(11) + \frac{1}{3}(-40) + y_3 = 10$$
$$22 - \frac{40}{3} + y_3 = 10$$
$$y_3 = 10 - 22 + \frac{40}{3}$$
$$\mathbf{y_3 = \frac{4}{3}}$$

A partir de la nueva matriz U, se obtiene $Ux = y$ y se utiliza sustitución hacia atrás para obtener los valores de x_1, x_2 y x_3, que son las incógnitas del sistema de ecuaciones y por consiguiente, serán las soluciones del problema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & -13 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -40 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{3}x_1 = \frac{4}{3}$$

$$\boldsymbol{x_3} = \mathbf{1}$$

$$9x_2 - 13x_3 = -40$$
$$9x_2 - 13(1) = -40$$
$$9x_2 - 13 = -40$$
$$9x_2 = -40 + 13$$
$$9x_2 = -27$$
$$x_2 = \frac{-27}{9}$$
$$\boldsymbol{x_2} = -\mathbf{3}$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$$
$$x_1 - 2(-3) + 3(1) = 11$$
$$x_1 + 6 + 3 = 11$$
$$x_1 = 11 - 6 - 3$$
$$\boldsymbol{x_1} = \mathbf{2}$$

El sistema de ecuaciones de este ejemplo es el mismo que se resolvió con el método de Gauss-Jordan. Observe que se obtienen los mismos resultados para las tres incógnitas.

Raíces de funciones: algebraicas y trascendentales

El cálculo de raíces de funciones algebraicas y trascendentales se utiliza en muchos problemas de ingeniería. Debido a esto, es conveniente conocer y comprender métodos que faciliten este proceso.

En la segunda sección del Capítulo II se estudiarán cinco métodos para encontrar las raíces de funciones algebraicas y trascendentales. El primer método que se describirá consiste en realizar aproximaciones sucesivas para obtener la raíz de una función. Posteriormente, se describirán dos métodos cerrados que son el método de intervalo medio y el método de regula falsi; y finalmente se describirán dos métodos abiertos que son el método de Newton-Raphson y el método de la secante.

Todos los métodos se demostrarán con ejemplos, con el fin de facilitar la comprensión de cada uno de estos.

Métodos de aproximaciones sucesivas

Este es un método simple para encontrar la raíz de una función, aunque no es el más eficiente, dado que en muchos casos la función no converge (Khoury & Harder, 2016). El primer paso es arreglar la ecuación $f(x) = 0$ a la forma $x = g(x)$, de modo que se obtenga una ecuación iterativa. Este paso se realiza a través de operaciones algebraicas o sumando x en ambos lados de $f(x) = 0$.

Como explica (Chapra & Canale, 2015), la ecuación $x = g(x)$ brinda una fórmula para calcular un nuevo valor de x en función de su valor anterior. Así, dado un valor estimado de la raíz x_0, se puede obtener una nueva aproximación de x_{i+1} mediante la siguiente fórmula:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Para este método iterativo, se considera que $x = g(x)$ converge si el error aproximado entre dos iteraciones consecutivas es menor a un valor preestablecido. Este también se considera el criterio de paro y por consiguiente, se detiene el cálculo. El cálculo del error aproximado está dado por la siguiente fórmula, donde x_{i+1} es el valor de la raíz en la iteración actual y x_i es el valor de la raíz en la iteración anterior:

$$E_a = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \cdot 100\%$$

Ejemplo: Utilizar el método de aproximaciones sucesivas para encontrar la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x + 1$. Tomar como valor inicial $x_0 = 1$ y utilizar el método hasta que el error aproximado sea menor a 5%.

- **Solución:** Se arregla la función dada a la forma $x_{i+1} = g(x_i)$ para obtener la fórmula que permitirá calcular las aproximaciones. La función $f(x) = e^{-x} - x + 1$ quedaría de la siguiente manera:

$$x_{i+1} = e^{-x_i} + 1$$

Iteración 1: Se calcula la aproximación de la raíz tomando como valor inicial $x_0 = 1$:

$$x_1 = e^{-x_0} + 1 = e^{-(1)} + 1 = 1.3679$$

Se calcula el error aproximado:

$$E_a = \left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = \left|\frac{1.3679 - 1}{1.3679}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = 26.8952\%$$

Como el error aproximado aún no es menor a 5%, se calcula la segunda iteración.

Iteración 2: Se parte de $x_1 = 1.3679$, obtenido en la iteración anterior:

$$x_2 = e^{-x_1} + 1 = e^{-(1.3679)} + 1 = 1.2546$$

Se calcula el error aproximado:

$$E_a = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = \left|\frac{1.2546 - 1.3679}{1.2546}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = 9.0308\%$$

Como el error aproximado aún no es menor a 5%, se calcula la tercera iteración.

Iteración 3: Se parte de $x_2 = 1.2546$, obtenido en la iteración anterior:

$$x_3 = e^{-x_2} + 1 = e^{-(1.2546)} + 1 = 1.2852$$

Se calcula el error aproximado:

$$E_a = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = \left|\frac{1.2852 - 1.2546}{1.2852}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = 2.3809\%$$

Como el error aproximado es menor a 5%, se termina el cálculo.

En la siguiente tabla se resumen los resultados de cada iteración:

Iteración	x_i	x_{i+1}	E_a
1	1	1.3679	26.8952%
2	1.3679	1.2546	9.0308%
3	1.2546	1.2852	2.3809%

Métodos de aproximaciones que usan intervalos para calcular las raíces

Los métodos de aproximaciones que usan intervalos para el cálculo de raíces, también denominados **métodos cerrados** o **de intervalos**, son aquellos en los que se utiliza un intervalo cerrado $[a, c]$ dentro del cual está al menos una raíz de la ecuación que hace a $f(x) = 0$. Estos métodos emplean el cambio de signo de la función en aquellos valores cercanos a la raíz (Chapra & Canale, 2015).

Como explica (Khoury & Harder, 2016), el que se utilice un intervalo en estos métodos garantiza la convergencia de la función, lo que significa que se encontrará su raíz. Sin embargo, como el intervalo debe modificarse en cada iteración, se convierte en un proceso lento.

Método de intervalo medio

El **método de intervalo medio**, también denominado **método de bisección** o **método de Bolzano**, consiste en una búsqueda iterativa en el que el intervalo $[a, c]$ siempre se bisecta (divide) en dos subintervalos: $[a, b]$ y $[b, c]$. Luego, si ocurre un cambio de signo sobre alguno de los subintervalos, se evalúa la función en el punto medio del subintervalo para determinar la posición de la raíz.

En cada iteración, se obtiene un nuevo intervalo que contiene a la raíz y que se bisecta, repitiendo el proceso descrito anteriormente. Además de esto, el intervalo se hará cada vez más pequeño por lo que en cada iteración se irá obteniendo una mejor aproximación de la raíz.

A continuación, se indican los pasos para aplicar este método, basado en la descripción hecha por (Chapra & Canale, 2015):

1) Elegir los valores iniciales inferior x_l y superior x_u para el intervalo que encerrará a la raíz. Esto debe ser de forma tal que haya un cambio de signo en el intervalo. Esto puede comprobarse con:

$$f(x_l)f(x_u) < 0$$

2) Determinar una aproximación de la raíz x_r con la siguiente fórmula:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

3) Evaluar la función para determinar en cuál subintervalo se encuentra la raíz. Para ello, verificar que:

- ✓ Si $f(x_l)f(x_r) < 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo inferior o izquierdo. Hacer $x_u = x_r$ y repetir el proceso desde el paso **2**.
- ✓ Si $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo superior o derecho. Hacer $x_l = x_r$ y repetir el proceso desde el paso **2**.
- ✓ Si $f(x_l)f(x_r) = 0$, entonces la raíz es igual a x_r. Se detiene el cálculo.

El criterio de paro del método se da cuando entre dos iteraciones consecutivas, el error aproximado es menor a un valor preestablecido. Para ello, se utiliza la siguiente fórmula descrita por (Chapra & Canale, 2015), donde x_r^{nuevo} es la raíz obtenida en la iteración actual y $x_r^{anterior}$ es la raíz obtenida en la iteración anterior:

$$E_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right| \cdot 100\%$$

Ejemplo: Utilizar el método de intervalo medio para encontrar la raíz de la función $f(x) = x - e^{-x^2}$. Tomar como valores iniciales al intervalo $[0,1]$ y utilizar el método hasta que el error aproximado sea menor a 10%.

- **Solución:** Partiendo del intervalo $[0,1]$, se toman como valores iniciales a $x_l = 0$ y $x_u = 1$.

  Iteración 1: Partiendo de $x_l = 0$ y $x_u = 1$, se calcula la aproximación de la raíz x_r:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

  Se evalúa la función en $x_l = 0$ y $x_r = 0.5$. Evaluando la función en $x_l = 0$, se obtiene:

$$f(0) = (0) - e^{-(0)^2} = -1$$

  Evaluando la función en $x_r = 0.5$, se obtiene:

$$f(0.5) = (0.5) - e^{-(0.5)^2} = -0.2788$$

Se obtiene el valor de $f(x_l)f(x_r)$:

$$f(x_l)f(x_r) = (-1)(-0.2788) = 0.2788$$

Como $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces $x_l = x_r = 0.5$.

Iteración 2: Partiendo de $x_l = 0.5$ y $x_u = 1$, se calcula la aproximación de la raíz x_r:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

Se evalúa la función en $x_l = 0.5$ y $x_r = 0.75$. Evaluando la función en $x_l = 0.5$, cuyo valor se calculó anteriormente, se obtiene:

$$f(0.5) = -0.2788$$

Evaluando la función en $x_r = 0.75$, se obtiene:

$$f(0.75) = (0.75) - e^{-(0.75)^2} = 0.1802$$

Se obtiene el valor de $f(x_l)f(x_r)$:

$$f(x_l)f(x_r) = (-0.2788)(0.1802) = -0.0502$$

Como $f(x_l)f(x_r) < 0$, entonces $x_u = x_r = 0.75$.

Como ya se tienen dos valores calculados para x_r, se puede calcular el error aproximado:

$$E_a = \left|\frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = \left|\frac{0.75 - 0.5}{0.75}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = 33.3333\%$$

Como el error aproximado aún no es menor a 5%, se calcula la siguiente iteración.

Iteración 3: Partiendo de $x_l = 0.5$ y $x_u = 0.75$, se calcula la aproximación de la raíz x_r:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

Se evalúa la función en $x_l = 0.5$ y $x_r = 0.625$. Evaluando la función en $x_l = 0.5$, cuyo valor se calculó anteriormente, se obtiene :

$$f(0.5) = -0.2788$$

Evaluando la función en $x_r = 0.625$, se obtiene:

$$f(0.625) = (0.625) - e^{-(0.625)^2} = -0.0516$$

Se obtiene el valor de $f(x_l)f(x_r)$:

$$f(x_l)f(x_r) = (-0.2788)(-0.0516) = 0.0144$$

Como $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces $x_l = x_r = 0.625$.

Se calcula el error aproximado:

$$E_a = \left|\frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = \left|\frac{0.625 - 0.75}{0.625}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = 20.0000\%$$

Se continúa con las siguientes iteraciones hasta que el error aproximado sea menor a 10%. En este problema, esto se obtiene en la cuarta iteración. En la siguiente tabla se resumen los resultados desde la primera hasta la cuarta iteración:

Iteración	x_l	x_u	x_r	$f(x_l)$	$f(x_r)$	$f(x_l)f(x_r)$	E_a
1	0	1	0.5	-1	-0.2788	0.2788	$-$
2	0.5	1	0.75	-0.2788	0.1802	-0.0502	33.3333%
3	0.5	0.75	0.625	-0.2788	-0.0516	0.0144	20.0000%
4	0.625	0.75	0.6875	-0.0516	0.0642	-0.0033	9.0909%

Método de regula falsi

El **método de regula falsi**, también llamado **método de falsa posición** o **método de interpolación lineal**, es similar al método de intervalo medio ya que, como describe (Nakamura, 1992), el intervalo que contiene la raíz se hace más pequeño en cada iteración. Sin embargo, el método de regula falsi es más eficiente.

En el método de regula falsi no se bisecta el intervalo que contiene la raíz, sino que utiliza la interpolación lineal entre sus dos puntos extremos para encontrar una aproximación de la raíz (Nakamura, 1992). De esta manera, se obtienen raíces más precisas y la convergencia se logra más rápidamente.

A continuación, se indican los pasos para aplicar este método, los cuales son similares a los del método de intervalo medio:

1) Elegir los valores iniciales inferior x_l y superior x_u para el intervalo que encerrará a la raíz. Esto debe ser de forma tal que haya un cambio de signo en el intervalo. Esto puede comprobarse con:

$$f(x_l)f(x_u) < 0$$

2) Determinar una aproximación de la raíz x_r con la siguiente fórmula:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

3) Evaluar la función para determinar en cuál subintervalo se encuentra la raíz. Para ello, verificar que:

- ✓ Si $f(x_l)f(x_r) < 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo inferior o izquierdo. Hacer $x_u = x_r$ y repetir el proceso desde el paso **2**.
- ✓ Si $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo superior o derecho. Hacer $x_l = x_r$ y repetir el proceso desde el paso **2**.
- ✓ Si $f(x_l)f(x_r) = 0$, entonces la raíz es igual a x_r. Se detiene el cálculo.

El criterio de paro del método se da cuando entre dos iteraciones consecutivas, el error aproximado es menor a un valor preestablecido. Se utiliza la misma fórmula descrita para el método de intervalo medio, donde x_r^{nuevo} es la raíz obtenida en la iteración actual y $x_r^{anterior}$ es la raíz obtenida en la iteración anterior:

$$E_a = \left|\frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}}\right| \cdot 100\%$$

Ejemplo: Utilizar el método de regula falsi para encontrar la raíz de la función $f(x) = 3 - 2^x$. Tomar como valores iniciales al intervalo $[0,2]$ y utilizar el método hasta que el error aproximado sea menor a 10%.

- **Solución:** Partiendo del intervalo $[0,2]$, se toman como valores iniciales a $x_l = 0$ y $x_u = 2$.

  Iteración 1: Se evalúa la función en $x_l = 0$ y $x_u = 2$. Evaluando la función en $x_l = 0$, se obtiene:

  $$f(0) = 3 - 2^{(0)} = 2$$

  Evaluando la función en $x_u = 2$, se obtiene:

  $$f(2) = 3 - 2^{(2)} = -1$$

  Se obtiene la aproximación de la raíz x_r:

  $$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

  $$x_r = 2 - \frac{(-1)(0-2)}{(2)-(-1)}$$

  $$x_r = 1.3333$$

  Se calcula $f(x_r)$ y luego se obtiene el valor de $f(x_l)f(x_r)$:

  $$f(1.3333) = 3 - 2^{(1.3333)} = 0.4802$$

  $$f(x_l)f(x_r) = (2)(0.4802) = 0.9604$$

Como $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces $x_l = x_r = 1.3333$.

Iteración 2: Partiendo de $x_l = 1.3333$ y $x_u = 2$, se evalúa la función en estos dos valores. Evaluando la función en $x_l = 1.3333$, el cual se calculó anteriormente, se obtiene:

$$f(1.3333) = 0.4802$$

Evaluando la función en $x_u = 2$, el cual se calculó anteriormente, se obtiene:

$$f(2) = -1$$

Se obtiene la aproximación de la raíz x_r:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_r = 2 - \frac{(-1)(1.3333 - 2)}{(0.4802) - (-1)}$$

$$x_r = 1.5496$$

Se calcula $f(x_r)$ y luego se obtiene el valor de $f(x_l)f(x_r)$:

$$f(1.5496) = 3 - 2^{(1.5496)} = 0.0726$$

$$f(x_l)f(x_r) = (0.4802)(0.0726) = 0.0349$$

Como $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces $x_l = x_r = 1.5496$.

Como ya se tienen dos valores calculados para x_r, se puede calcular el error aproximado:

$$E_a = \left|\frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = \left|\frac{1.5496 - 1.3333}{1.5496}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = 13.9584\%$$

Como el error aproximado aún no es menor a 5%, se calcula la siguiente iteración.

Iteración 3: Partiendo de $x_l = 1.5496$ y $x_u = 2$, se evalúa la función en estos dos valores. Evaluando la función en $x_l = 1.5496$, el cual se calculó anteriormente, se obtiene:

$$f(1.5496) = 0.0726$$

Evaluando la función en $x_u = 2$, el cual se calculó anteriormente, se obtiene:

$$f(2) = -1$$

Se obtiene la aproximación de la raíz x_r:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_r = 2 - \frac{(-1)(1.5496 - 2)}{(0.0726) - (-1)}$$

$$x_r = 1.5801$$

Se calcula $f(x_r)$ y luego se obtiene el valor de $f(x_l)f(x_r)$:

$$f(1.5801) = 3 - 2^{(1.5801)} = 0.0101$$

$$f(x_l)f(x_r) = (0.0726)(0.0101) = 0.0007$$

Como $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces $x_l = x_r = 1.5801$.

Como ya se tienen dos valores calculados para x_r, se puede calcular el error aproximado:

$$E_a = \left|\frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = \left|\frac{1.5801 - 1.5496}{1.5801}\right| \cdot 100\%$$

$$E_a = 1.9303\%$$

Como se obtuvo un error aproximado menor a 10%, se detiene el cálculo.

En la siguiente tabla se resumen los resultados de las iteraciones:

i	x_l	x_u	x_r	$f(x_l)$	$f(x_u)$	$f(x_r)$	$f(x_l)f(x_r)$	E_a
1	0	2	1.3333	2	-1	0.4802	0.9604	$-$
2	1.3333	2	1.5496	0.4802	-1	0.0726	0.0349	13.9584%
3	1.5496	2	1.5801	0.0726	-1	1.5801	0.0007	1.9303%

Métodos abiertos para el cálculo de raíces

Los **métodos abiertos** para el cálculo de raíces, a diferencia de los métodos cerrados, no necesitan de un intervalo que contenga a la raíz. Como describe (Khoury & Harder, 2016), en los métodos abiertos se utilizan valores iniciales en una fórmula matemática que se usará en las iteraciones para determinar la raíz.

Debido a que no se utilizan intervalos, los métodos abiertos son más eficientes que los métodos cerrados porque tienden a converger más rápidamente. Sin embargo, por ese mismo motivo, en algunos casos divergen (se alejan de la raíz verdadera) (Chapra & Canale, 2015).

Método de Newton-Raphson

El **método de Newton-Raphson** hace uso de la evaluación analítica de las rectas tangentes (Nakamura, 1992), que van desde el punto $(x_i, f(x_i))$, para la gráfica de una función $f(x_i)$. Generalmente, el punto por el que la recta tangente corta al eje x, es una mejor aproximación de la raíz.

Se utiliza la siguiente fórmula, donde $f(x_i)$ es la función y $f'(x_i)$ es la primera derivada de la función:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

El criterio de paro del método se da cuando entre dos iteraciones consecutivas, el error aproximado es menor a un valor preestablecido. Sin embrago, como describe (Khoury & Harder, 2016), otro criterio de paro es si la primera derivada de la función es igual a cero, para lo cual habría una discontinuidad y se daría una división entre cero en la fórmula. En este último caso, no se podría continuar utilizando el método.

Ejemplo: Utilizar el método de Newton-Raphson para encontrar la raíz de la función $f(x) = e^x - 2$. Tomar como valor inicial a $x_0 = 1$. Calcular 3 iteraciones.

- **Solución:** Se obtiene la primera derivada de la función:

  $f(x) = e^x - 2$

  $f'(x) = e^x$

  Iteración 1: Se evalúa $f(x)$ y $f'(x)$ en $x_0 = 1$. Evaluando $f(x)$ se obtiene:

  $$f(1) = e^{(1)} - 2 = 0.7183$$

  Evaluando $f'(x)$ se obtiene:

  $$f'(1) = e^{(1)} = 2.7183$$

  Se obtiene la aproximación de la raíz:

  $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

  $$x_1 = 1 - \frac{0.7183}{2.7183}$$

  $$x_1 = 0.7358$$

  Iteración 2: Se evalúa $f(x)$ y $f'(x)$ en $x_1 = 0.7358$. Evaluando $f(x)$ se obtiene:

  $$f(0.7358) = e^{(0.7358)} - 2 = 0.0872$$

  Evaluando $f'(x)$ se obtiene:

  $$f'(0.7358) = e^{(0.7358)} = 2.0872$$

Se obtiene la aproximación de la raíz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 0.7358 - \frac{0.0872}{2.0872}$$

$$x_2 = 0.6940$$

Iteración 3: Se evalúa $f(x)$ y $f'(x)$ en $x_2 = 0.6940$. Evaluando $f(x)$ se obtiene:

$$f(0.6940) = e^{(0.6940)} - 2 = 0.0017$$

Evaluando $f'(x)$ se obtiene:

$$f'(0.6940) = e^{(0.6940)} = 2.0017$$

Se obtiene la aproximación de la raíz:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_3 = 0.6940 - \frac{0.0017}{2.0017}$$

$$x_3 = 0.6932$$

En la siguiente tabla se resumen los resultados de las iteraciones:

Iteración	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
1	1	0.7183	2.7183	0.7358
2	0.7358	0.0872	2.0872	0.6940
3	0.6940	0.0017	2.0017	0.6932

Método de la secante

El **método de la secante** es un método muy similar al método de Newton-Raphson, siendo la principal diferencia que las aproximaciones se obtienen a partir de dos valores iniciales de x y no requiere de la evaluación de la primera derivada de la función en cada iteración (Khoury & Harder, 2016). Sin embargo, a pesar de utilizar dos valores iniciales, no se considera un método cerrado porque no requiere de un cambio de signos entre los valores.

El método de la secante puede utilizarse en casos en los que el cálculo de la derivada de la función sea muy difícil, como ocurre en muchos problemas de la vida real. Como describe (Epperson, 2013), este método se basa en el uso de la línea secante, es decir, una línea que corta en dos puntos a la gráfica de la función. La fórmula de recurrencia para el cálculo de las aproximaciones a la raíz es la siguiente:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

El criterio de paro del método se da cuando entre dos iteraciones consecutivas, el error aproximado es menor a un valor preestablecido. Sin embrago, al igual que en el método de Newton-Raphson, si en la fórmula el denominador es igual a cero, no se puede continuar utilizando el método de la secante.

Ejemplo: Utilizar el método de Newton-Raphson para encontrar la raíz de la función $f(x) = e^x - 2$. Tomar como valores iniciales a $x_{-1} = 0$ y $x_0 = 1$. Calcular 3 iteraciones.

- **Solución:** Se inicia con la primera iteración:

  Iteración 1: Partiendo de los valores iniciales $x_{-1} = 0$ y $x_0 = 1$, se evalúa la función. Evaluando en $x_{-1} = 0$, se obtiene:

  $$f(0) = e^{(0)} - 2 = -2$$

  Evaluando en $x_0 = 1$ se obtiene:

  $$f(1) = e^{(1)} - 2 = 0.7183$$

  Se obtiene la aproximación de la raíz:

  $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_{-1} - x_0)}{f(x_{-1}) - f(x_0)}$$

$$x_1 = 1 - \frac{(0.7183)\big((0) - (1)\big)}{(-2) - (0.7183)}$$

$$x_1 = 0.7358$$

Iteración 2: Partiendo de los valores $x_0 = 1$ y $x_1 = 0.7358$, se evalúa la función. Evaluando en $x_0 = 1$, la cual se calculó anteriormente, se obtiene:

$$f(1) = 0.7183$$

Evaluando en $x_1 = 0.7358$ se obtiene:

$$f(0.7358) = e^{(0.7358)} - 2 = 0.0872$$

Se obtiene la aproximación de la raíz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$x_2 = 0.7358 - \frac{(0.0872)\big((1) - (0.7358)\big)}{(0.7183) - (0.0872)}$$

$$x_2 = 0.6993$$

Iteración 3: Partiendo de los valores $x_1 = 0.7358$ y $x_2 = 0.6993$, se evalúa la función. Evaluando en $x_1 = 0.7358$, la cual se calculó anteriormente, se obtiene:

$$f(0.7358) = 0.0872$$

Evaluando en $x_2 = 0.6993$ se obtiene:

$$f(0.6993) = e^{(0.6993)} - 2 = 0.0123$$

Se obtiene la aproximación de la raíz:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$x_3 = 0.6993 - \frac{(0.0123)\big((0.7358) - (0.6993)\big)}{(0.0872) - (0.0123)}$$

$$x_3 = 0.6993$$

En la siguiente tabla se resumen los resultados de las iteraciones:

Iteración	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}
1	0	1	-2	0.7183	0.7358
2	1	0.7358	0.7183	0.0872	0.6993
3	0.7358	0.6993	0.0872	0.0123	0.6933

Solución de polinomios

Los polinomios tienen diversas aplicaciones en la ciencia y en la ingeniería, como por ejemplo en circuitos eléctricos y en sistemas dinámicos (Chapra & Canale, 2015).

En la tercera sección del Capítulo II se explicarán dos métodos para encontrar soluciones de polinomios: la división sintética y el método de Lin-Bairstow. Se iniciará con una breve descripción del concepto de polinomio y el teorema sobre raíces de polinomios. Posteriormente, se describirán cada uno de los métodos y se presentarán ejemplos para cada método, con el objetivo de que sea más sencilla la comprensión de esta sección.

Teorema sobre raíces de polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica que tiene la siguiente forma general:

$$\boldsymbol{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

donde:

- la $\boldsymbol{n}$ con el valor más alto corresponde al **grado**
- $\boldsymbol{a_0, a_1, \dots, a_n}$ son los **coeficientes**
- $\boldsymbol{a_0}$ es el término constante

De acuerdo con (Mathews, Brown, Evans, & Hunt, 2013), el **teorema fundamental del álgebra** dice lo siguiente sobre las raíces de polinomios:

> *Si $P(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $P(x) = 0$ tiene como máximo n raíces o soluciones reales.*

División sintética: Regla de Horner

La **división sintética** es un método simplificado para dividir polinomios, cuando el divisor es un binomio de la forma $(x \pm k)$, donde k es un número real (OpenStax, 2017). Su principal característica es que en el proceso de la división sólo se utilizan los coeficientes.

Los pasos que se deben seguir para hacer una división sintética son los siguientes:

1. Ordenar el dividendo en potencias decrecientes de la variable de los polinomios. Para las potencias faltantes, agregarlas colocando un cero como coeficiente.
2. Despejar el binomio divisor para obtener k y colocarlo en la esquina superior izquierda.
3. El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo.
4. El resto de los coeficientes del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por k y luego sumando el resultado del producto al siguiente término del coeficiente del dividendo.
5. Obtener el segundo coeficiente del cociente multiplicando k por el primer coeficiente del cociente. El resultado de esto se suma al segundo coeficiente del dividendo para obtener el segundo coeficiente del cociente.
6. Repetir el paso anterior de forma similar para obtener el resto de los coeficientes del cociente. Multiplicar el coeficiente del término anterior por k y sumar el producto al siguiente término del dividendo para obtener el coeficiente que ocupa el mismo lugar en el cociente.
7. El proceso termina cuando se obtiene el residuo, a partir del término independiente del dividendo.

En la ***Figura 4*** se demuestra gráficamente, el proceso de la división sintética:

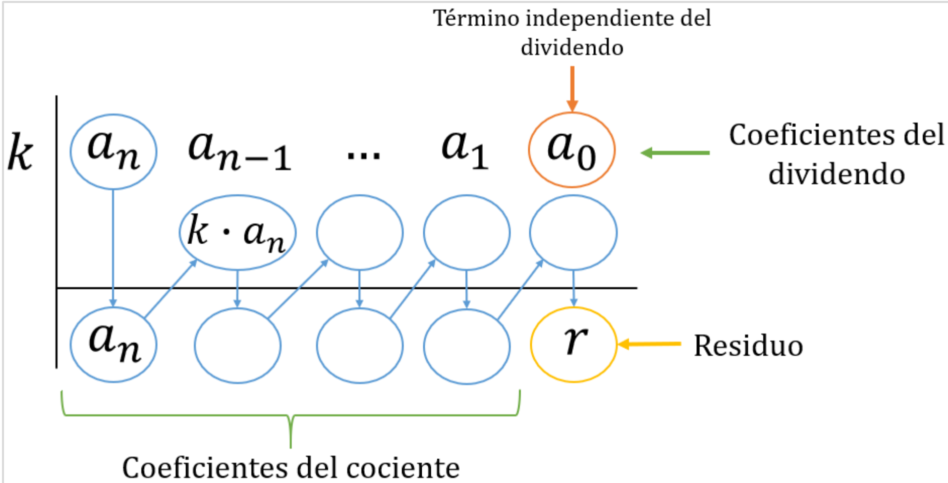


Figura 4. Representación gráfica de la división sintética. Elaboración propia.

El cociente que resulta de la división sintética es un polinomio con **un** grado menos que el grado del dividendo (Baldor, 2005).

Ejemplo #1: Utilizar la división sintética para dividir $P(x) = 5x^2 - 3x - 36$ entre $(x - 3)$.

- **Solución:** Primero se ordena el polinomio dividendo, con lo cual se obtiene lo siguiente:

  $$P(x) = 5x^2 - 3x - 36$$

  A continuación se despeja el divisor:

  $$x - 3 = 0$$
  $$x = -3$$

  Se colocan los coeficientes del dividendo y el valor de k de la siguiente manera:

  $$\begin{array}{c|ccc} 3 & 5 & -3 & -36 \\ & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

  Se procede a realizar la división sintética, la cual se muestra a continuación:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 5 & -3 & -36 \\ & & 15 & 36 \\ \hline & 5 & 12 & 0 \end{array}$$

Observe que en este ejemplo el residuo es igual a cero.

El resultado de la división sintética puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{5x^2 - 3x - 36}{x - 3} = 5x + 12$$

Ejemplo #2: Utilizar la división sintética para dividir $P(x) = -9x^4 + 10x^3 + 7x^2 - 6$ entre $(x - 1)$.

- **Solución:** Primero se ordena el polinomio dividendo, con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$P(x) = -9x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 0x - 6$$

Observe que se agrega un cero en el coeficiente faltante.

A continuación se despeja el divisor:

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Se colocan los coeficientes del dividendo y el valor de k de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & -9 & 10 & 7 & 0 & -6 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Se procede a realizar la división sintética, la cual se muestra a continuación:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & -9 & 10 & 7 & 0 & -6 \\ & & -9 & 1 & 8 & 8 \\ \hline & -9 & 1 & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

Observe que en este ejemplo el residuo es igual a **2**.

El resultado de la división sintética puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{-9x^4 + 10x^3 + 7x^2 - 6}{x - 1} = -9x^3 + x^2 + 8x + 8 + \frac{2}{x - 1}$$

Método de Lin-Bairstow

El método de Bairstow es un método iterativo que permite obtener las raíces reales y complejas de un polinomio, a través de la división del polinomio entre un factor cuadrático $x^2 - rx - s$ (Chapra & Canale, 2015). Se utilizan los valores iniciales de iniciales r y s. Estos valores se encuentran utilizando el método de Newton-Raphson, los cuales hacen que el residuo sea cero, es decir, que se encuentran las raíces del sistema.

$$b_n(r, s) = 0$$

$$b_{n-1}(r, s) = 0$$

Utilizando las siguientes relaciones de recurrencia se obtienen ecuaciones simultáneas que permitirán encontrar el valor de Δr y Δs:

$$r = r + \Delta r \qquad \longrightarrow \qquad \text{Donde:}$$

$$s = s + \Delta s \qquad \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_n \\ -b_{n+1} \end{bmatrix}$$

Este método puede realizarse fácilmente a través de pasos similares a la división sintética, como se muestra en la ***Figura 5***:

	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}	$\rightarrow$ Coeficientes del polinomio
r		rb_1	rb_2	$\cdots$	rb_{n-3}	rb_{n-2}	rb_{n-1}	rb_n	
s			sb_1	$\cdots$	sb_{n-4}	sb_{n-3}	sb_{n-2}	sb_{n-1}	
	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n	b_{n+1}	
r		rc_1	rc_2	$\cdots$	rc_{n-3}	rc_{n-2}	rc_{n-1}		
s			sc_1	$\cdots$	sc_{n-4}	sc_{n-3}	sc_{n-2}		
	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n		

Figura 5. Representación del método de Lin-Bairstow. Elaboración propia.

Ejemplo: Utilizando el método de Bairstow, haga dos iteraciones con el siguiente polinomio $P(x) = x^4 - 1.1x^3 + 2.3x^2 + 0.5x + 3.3$ y encuentre los valores r y s. Tome como valores iniciales a $r = -1$ y $s = -1$.

- **Solución:**
  Primera iteración: Se empieza el cálculo con los valores iniciales de r y s. Se procede con el cálculo de los valores de b, como se muestra a continuación:

	1	-1.1	2.3	0.5	3.3
$r = -1$		-1	2.1	-3.4	0.8
$s = -1$			-1	2.1	-3.4
	1	-2.1	3.4	-0.8	0.7

Se procede con el cálculo de los valores de c, como se muestra a continuación:

	1	-2.1	3.4	-0.8	0.7
$r = -1$		-1	3.1	-5.5	
$s = -1$			-1	3.1	
	1	-3.1	5.5	-3.2	

El cálculo completo de los valores de b y c se muestra en la siguiente tabla:

	1	-1.1	2.3	0.5	3.3
$r=-1$		-1	2.1	-3.4	0.8
$s=-1$			-1	2.1	-3.4
	1	-2.1	3.4	-0.8	0.7
$r=-1$		-1	3.1	-5.5	
$s=-1$			-1	3.1	
	1	-3.1	5.5	-3.2	

De acuerdo con lo anterior, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_n \\ -b_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5.5 & -3.1 \\ -3.2 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.7 \end{bmatrix}$$

$$5.5\Delta r - 3.1\Delta s = 0.8$$
$$-3.2\Delta r + 5.5\Delta s = -0.7$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que:

$$\Delta r = 0.11$$

$$\Delta s = -0.06$$

Remplazando Δr y Δs en las relaciones de recurrencia, se obtiene que:

$r = r + \Delta r$	$s = s + \Delta s$
$r = -1 + 0.11$	$s = -1 + (-0.06)$
$\boldsymbol{r = -0.89}$	$\boldsymbol{s = -1.06}$

Segunda iteración: El cálculo se realiza con los nuevos valores para $r = -0.89$ y $s = -1.06$. Se procede con el cálculo de los valores de b y c, como se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & 1 & -1.1 & 2.3 & 0.5 & 3.3 \\
r=-0.89 & & -0.89 & 1.77 & -2.68 & 0.06 \\
s=-1.06 & & & -1.06 & 2.11 & -3.19 \\
\hline
 & 1 & -1.99 & 3.01 & -0.07 & 0.17 \\
r=-0.89 & & -0.89 & 2.56 & -4.01 & \\
s=-1.06 & & & -1.06 & 3.05 & \\
\hline
 & 1 & -2.88 & 4.51 & -1.03 &
\end{array}
$$

De acuerdo con lo anterior, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_n \\ -b_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.51 & -2.88 \\ -1.03 & 4.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ -0.17 \end{bmatrix}$$

$$4.51\Delta r - 2.88\Delta s = 0.07$$
$$-1.03\Delta r + 4.51\Delta s = -0.17$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que:

$$\Delta r = -0.01$$

$$\Delta s = -0.04$$

Remplazando Δr y Δs en las relaciones de recurrencia, se obtiene que:

$$r = r + \Delta r \qquad s = s + \Delta s$$
$$r = -0.89 + (-0.01) \qquad s = -1.06 + (-0.04)$$
$$\boldsymbol{r = -0.90} \qquad \boldsymbol{s = -1.10}$$

Capítulo III: Aproximación funcional/polinomial y soluciones de una ecuación diferencial

Interpolación numérica

En la primera sección del Capítulo III se estudiarán los diferentes métodos de interpolación y regresión que más comúnmente se utilizan en ingeniería.

Dentro de los métodos de interpolación que se estudiarán están el método del polinomio único, el método de Lagrange y el método de Newton; mientras que dentro de los métodos de regresión están la regresión lineal simple, la regresión polinomial, la regresión múltiple, la regresión exponencial y la regresión potencial. Para todos estos métodos se presentarán sus correspondientes fórmulas y se presentarán ejemplos con el fin de facilitar su comprensión.

Polinomio único

El **método de interpolación del polinomio único**, también denominada **interpolación polinomial**, es el más común y consiste en determinar un polinomio único de grado n que pasa a través de todos los puntos y que se ajuste a $n+1$ puntos asociados con los datos (Chapra & Canale, 2015).

Asumiendo $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, se generan $n+1$ ecuaciones en $n+1$ incógnitas; siendo estos los coeficientes a_i:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_0 & + & a_1x_0 & + & a_2x_0^2 & + & \ldots & + & a_nx_0^n & = & y_0 \\
a_0 & + & a_1x_1 & + & a_2x_1^2 & + & \ldots & + & a_nx_1^n & = & y_1 \\
. & . & . & . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\
a_0 & + & a_1x_n & + & a_2x_n^2 & + & \cdots & + & a_nx_n^n & = & y_n
\end{array}
$$

Esto se puede representar de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ . & . & . & \cdots & \\ . & . & . & \cdots & \\ . & . & . & \cdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Encontrar el polinomio de interpolación único para los valores $(10, 0.1736)$, $(20, 0.3640)$ y $(30, 0.5774)$. Interpolar el valor en $x = 21$.

- **Solución:**
  Se identifican los valores para los coeficientes de a_i y se ubican los pares en función de x_i y y_i:

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \\ \\ (10, 0.1736) & (20, 0.3640) & (30, 0.5774) \\ \\ x_0 \quad y_0 & x_1 \quad y_1 & x_2 \quad y_2 \end{array}$$

Se determina el polinomio que se va a buscar:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Se escriben los valores dados de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 30 & 900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1736 \\ 0.3640 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones y su solución:
$a_0 + 10a_1 + 100a_2 = 0.1736$
$a_0 + 20a_1 + 400a_2 = 0.3640$

$a_0 + 30a_1 + 900a_2 = 0.5774$

$a_0 = 0.0062$
$a_1 = 0.0156$
$a_2 = 0.0001$

Se sustituyen los valores de las incógnitas en el polinomio:

$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$P_2(x) = 0.0062 + 0.0156x + 0.0001x^2$

Se interpola el polinomio en $x = 21$:

$P_2(x) = 0.0062 + 0.0156x + 0.0001x^2$

$P_2(21) = 0.0062 + 0.0156(21) + 0.0001(21)^2$

$P_2(21) = 0.0062 + 0.3276 + 0.0441$

$\boldsymbol{P_2(21) = 0.3779}$

Método de Lagrange

El **método de interpolación de Lagrange** consiste en construir un polinomio $P_n(x)$ de grado máximo n, que pasa por $n + 1$ puntos.

Se utilizan la siguiente fórmulas:

- **Primer grado:**

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

- **Segundo grado:**

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Ejemplo: Con un polinomio de interpolación de Lagrange de primer y segundo grado, evalúe $f(x) = \ln x$ para $x = 2$, basándose en los siguientes datos: $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ y $x_2 = 6$.

- **Solución:**
  Se evalúa la función en los valores dados:

$$x_0 = 1 \longrightarrow \begin{aligned} f(x_0) &= \ln x \\ f(x_0) &= \ln 1 \\ f(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 4 \longrightarrow \begin{aligned} f(x_1) &= \ln x \\ f(x_1) &= \ln 4 \\ f(x_1) &= 1.3863 \end{aligned}$$

$$x_2 = 6 \longrightarrow \begin{aligned} f(x_2) &= \ln x \\ f(x_2) &= \ln 6 \\ f(x_2) &= 1.7918 \end{aligned}$$

Se evalúa en la ecuación de primer grado para $x = 2$:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f_1(2) = \frac{2 - 4}{1 - 2}(0) + \frac{2 - 1}{4 - 1}(1.3863)$$

$$\boldsymbol{f_1(2) = 0.4621}$$

Se evalúa en la ecuación de segundo grado para $x = 2$:

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

$$f_2(2) = \frac{(2 - 4)(2 - 6)}{(1 - 4)(1 - 6)}(0) + \frac{(2 - 1)(2 - 6)}{(4 - 1)(4 - 6)}(1.3863) + \frac{(2 - 1)(2 - 4)}{(6 - 1)(6 - 4)}(1.7918)$$

$$f_2(2) = 0.9242 - 0.3584$$

$$\boldsymbol{f_2(2) = 0.5658}$$

Método de Newton

El **método de Newton** es una forma alternativa útil y muy común de expresar una interpolación polinomial (Chapra & Canale, 2015).

Diferencias divididas hacia adelante

Para un polinomio grado n se requieren $n+1$ puntos asociados con datos: $[x_0,\ f(x_0)]$, $[x_1,\ f(x_1)]$ … , $[x_n,\ f(x_n)]$, donde las evaluaciones de la función colocadas entre paréntesis son diferencias divididas finitas (Chapra & Canale, 2015).

El polinomio de grado n es:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \cdots$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

donde:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$ Primer diferencia dividida finita

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$ Segunda diferencia dividida finita

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$ n-ésima diferencia dividida finita

Ejemplo: Ajustar a un polinomio de segundo grado en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ y $x_2 = 6$. Evaluar $f(x) = ln\ x$ en $x = 2$ usando el método de Newton.

- **Solución:**
  Se evalúa la función en los valores dados:

$$x_0 = 1 \longrightarrow \begin{aligned} f(x_0) &= \ln x \\ f(x_0) &= \ln 1 \\ f(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 4 \longrightarrow \begin{aligned} f(x_1) &= \ln x \\ f(x_1) &= \ln 4 \\ f(x_1) &= 1.3863 \end{aligned}$$

$$x_2 = 6 \longrightarrow \begin{array}{l} f(x_2) = \ln x \\ f(x_2) = \ln 6 \\ f(x_2) = 1.7918 \end{array}$$

Se escribe a fórmula general para el polinomio de segundo grado de Newton:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]$$

Se obtienen las diferencias divididas finitas para los términos del polinomio:

$f(x_0) = \mathbf{0}$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.3863 - 0}{4 - 1}$$

$$\boldsymbol{f[x_1, x_0] = 0.4621}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1.7918 - 1.3863}{6 - 4}$$

$$\boldsymbol{f[x_2, x_1] = 0.2028}$$

Se reemplaza en la función cada diferencia dividida:

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0.2028 - 0.4621}{4 - 0} = -0.0683$$

Se reemplaza en el polinomio de segundo grado y se evalúa en $x = 2$:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]$$

$$f_2(2) = (0) + (2 - 1)(0.4621) + (2 - 1)(2 - 4)(-0.0683)$$

$$\boldsymbol{f_2(2) = 0.5987}$$

Método de regresión: mínimos cuadrados

Generalmente, los datos experimentales tienen errores sustanciales. En estos casos, no es apropiado utilizar la interpolación polinomial, ya que esto puede generar resultados poco satisfactorios al intentar hacer una predicción de los valores intermedios (Chapra & Canale, 2015).

En tales casos, se puede obtener una función de aproximación que se ajuste a la tendencia general de los datos, sin que necesariamente coincidan todos los datos. Como explica (Chapra & Canale, 2015), la técnica de **regresión por mínimos cuadrados** permite obtener la función de una curva, de modo que se minimice la discrepancia entre los puntos y la curva.

Regresión lineal

El **método de regresión lineal** es el más simple para obtener una aproximación por mínimos cuadrados, ya que consiste en realizar un ajuste de una línea recta a un conjunto de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ (Chapra & Canale, 2015).

Las fórmulas utilizadas en este método se resumen a continuación:

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	Media de x, donde n es la cantidad de datos
$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$	Media de y, donde n es la cantidad de datos
$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$	Ecuación que representa la pendiente
$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$	Ecuación que representa la intersección con el eje y
$y = a_0 + a_1 x$	Ecuación de la línea recta

Ejemplo: Ajustar a una línea recta los valores dados para x y y.

x_i	y_i
1	0.5
2	2.5
3	2.0
4	4.0

- **Solución:**
  Se completa la siguiente tabla y se obtienen las sumatorias:

	x_i	y_i	${x_i}^2$	$x_i y_i$
	1	0.5	1	0.5
	2	2.5	4	5.0
	3	2.0	9	6.0
	4	4.0	16	16.0
Σ	**10**	**9.0**	**30**	**27.5**

Se calculan los valores de $\bar{x}$ y $\bar{y}$, donde $n = 4$:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{9}{4} = 2.25$$

Se obtiene el valor de a_1:

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{(4)(2.75) - (10)(9)}{(4)(30) - (10)^2} = 1$$

Se obtiene el valor de a_0:

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} = 2.25 - (1)(2.5) = 2.25 - 2.5 = -0.25$$

Se obtiene la ecuación de la recta, para obtener el ajuste de los datos:

$$y = a_0 + a_1 x$$

$$\boldsymbol{y = -0.25 + x}$$

Regresión polinomial

El **método de regresión polinomial** consiste en extender el ajuste de los datos con un polinomio de grado superior, ya que, como explica (Chapra & Canale, 2015), algunos datos en ingeniería muestran un patrón que no puede ser representado adecuadamente por una línea recta. En estos casos es más adecuado ajustar los datos a una curva.

El método ajusta a un polinomio de segundo grado:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

utilizando las siguientes ecuaciones para obtener los coeficientes del polinomio, donde n es la cantidad de datos:

$$na_0 + \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum {x_i}^2\right)a_2 = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right)a_0 + \left(\sum {x_i}^2\right)a_1 + \left(\sum {x_i}^3\right)a_2 = \sum x_iy_i$$

$$\left(\sum {x_i}^2\right)a_0 + \left(\sum {x_i}^3\right)a_1 + \left(\sum {x_i}^4\right)a_2 = \sum {x_i}^2y_i$$

Ejemplo: Ajustar a un polinomio se segundo grado los datos dados:

x_i	y_i
0	2.1
1	7.7
2	13.6
3	27.2

- **Solución:**
  Se completa la siguiente tabla y se obtienen las sumatorias:

	x_i	y_i	${x_i}^2$	${x_i}^3$	${x_i}^4$	x_iy_i	${x_i}^2y_i$
	0	2.1	0	0	0	0	0
	1	7.7	1	1	1	7.7	7.7
	2	13.6	4	8	16	27.2	54.4
	3	27.2	9	27	81	81.6	244.8
Σ	**6**	**50.6**	**14**	**36**	**98**	**116.5**	**306.9**

Se obtienen las ecuaciones y su solución:

$$na_0 + \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum x_i{}^2\right)a_2 = \sum y_i$$
$$\left(\sum x_i\right)a_0 + \left(\sum x_i{}^2\right)a_1 + \left(\sum x_i{}^3\right)a_2 = \sum x_i y_i$$
$$\left(\sum x_i{}^2\right)a_0 + \left(\sum x_i{}^3\right)a_1 + \left(\sum x_i{}^4\right)a_2 = \sum x_i{}^2 y_i$$

$$4a_0 + 6a_1 + 14a_2 = 50.6$$
$$6a_0 + 14a_1 + 36a_2 = 116.5$$
$$14a_0 + 36a_1 + 98a_2 = 306.9$$

$$a_0 = 2.47$$
$$a_1 = 2.12$$
$$a_2 = 2.00$$

Se reemplazan los coeficientes en el polinomio de segundo grado, para obtener el ajuste de los datos:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\boldsymbol{y = 2.47 + 2.12x + 2.00x^2}$$

Regresión exponencial

El **método de regresión exponencial** es un método no lineal que ajusta los datos utilizando una función exponencial y toma logaritmos para linealizar el ajuste haciendo un cambio de variables (Martínez de Lejarza & Martínez de Lejarza, 2010).

Se utiliza la siguiente ecuación para el ajuste de los datos:

$$y = ab^x$$

para la cual se utilizan las siguientes fórmulas:

1	$v = \ln y$	2	$\bar{v} = \frac{\sum v}{n}$
3	$B = \frac{\frac{1}{n}\sum xv - (\bar{x})(\bar{v})}{\frac{1}{n}\sum x^2 - (\bar{x})^2} = \frac{\overline{xv} - (\bar{x})(\bar{v})}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$	4	$A = \bar{v} - B\bar{x}$
5	$a = anti \ln A = e^A$	6	$b = anti \ln B = e^B$

Ejemplo: Ajustar a una función exponencial los siguientes datos dados:

x	y
1	1.25
2	5
3	11.25
4	20
5	30.5

- **Solución:**
  Se completa la siguiente tabla y se obtienen las sumatorias:

	x	y	v	xv	x^2
	1	1.25	0.2231	0.2231	1
	2	5	1.6094	3.2188	4
	3	11.25	2.4204	7.2612	9
	4	20	2.9957	11.9828	16
	5	30.5	3.4177	17.0885	25
Σ	**15**	**68**	**10.6663**	**39.7744**	**55**

Se completa la tabla de medias y se calcula $\frac{\Sigma}{n}$:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{v}$	$\overline{xv}$	$\overline{x^2}$
$\frac{\Sigma}{n}$	**3**	**13.6**	**2.1333**	**7.9549**	**11**

Se calcula el valor de B:

$$B = \frac{\overline{xv} - (\bar{x})(\bar{v})}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{7.9549 - (3)(2.1333)}{11 - (3)^2} = 0.7775$$

Se calcula el valor de A:

$A = \bar{v} - B\bar{x}$

$A = 2.1333 - (0.7775)(3)$

$A = -0.1992$

Se calcula el valor de a:

$a = e^A$

$a = e^{-0.1992}$

$a = 0.8194$

Se calcula el valor de b:

$b = e^B$

$b = e^{0.7775}$

$b = 2.1760$

Se reemplazan los valores en la ecuación para el ajuste de los datos:

$$y = ab^x$$

$$\boldsymbol{y = (0.8194)(2.1760)^x}$$

Regresión potencial

El **método de regresión potencial** es un método no lineal que ajusta los datos utilizando una función potencial y toma logaritmos para linealizar el ajuste haciendo un cambio de variables (Martínez de Lejarza & Martínez de Lejarza, 2010).

Se utiliza la siguiente ecuación para el ajuste de los datos:

$$y = ax^b$$

para la cual se utilizan las siguientes fórmulas:

1	$v = \ln y$	**2**	$\bar{v} = \frac{\sum v}{n}$
3	$u = \ln x$	**4**	$\bar{u} = \frac{\sum u}{n}$
5	$B = \frac{\frac{1}{n}\sum uv - (\bar{u})(\bar{v})}{\frac{1}{n}\sum u^2 - (\bar{u})^2} = \frac{\overline{uv} - (\bar{u})(\bar{v})}{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}$	**6**	$A = \bar{v} - B\bar{u}$
7	$a = anti\ln A = e^A$		

Ejemplo: Ajustar a una función potencial los siguientes datos dados:

x	y
1	1.25
2	5
3	11.25
4	20
5	30.5

- **Solución:**
  Se completa la siguiente tabla y se obtienen las sumatorias:

	x	y	u	v	uv	u^2
	1	1.25	0	0.2231	0	0
	2	5	0.6931	1.6094	1.1155	0.4804
	3	11.25	1.0986	2.4204	2.6591	1.2069
	4	20	1.3863	2.9957	4.1529	1.9218
	5	30.5	1.6094	3.4177	5.5004	2.5902
Σ	**15**	**68**	**4.7874**	**10.6663**	**13.4279**	**6.1993**

Se completa la tabla de medias y se calcula $\frac{\Sigma}{n}$:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\overline{uv}$	$\overline{u^2}$
$\frac{\Sigma}{n}$	**3**	**13.6**	**0.9575**	**2.1333**	**2.6856**	**1.2399**

Se calcula el valor de B:

$$B = \frac{\overline{uv} - (\bar{u})(\bar{v})}{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \frac{2.6856 - (0.9575)(2.1333)}{1.2399 - (0.9575)^2} = 1.9900$$

Se calcula el valor de A:
$A = \bar{v} - B\bar{u}$
$A = 2.1333 - (1.9900)(0.9575)$
$A = 0.2279$

Se calcula el valor de a:
$a = e^{A}$
$a = e^{0.2279}$
$a = 1.2560$

Se reemplazan los valores en la ecuación para el ajuste de los datos:

$$y = ax^{b}$$

$$\boldsymbol{y = 1.2560x^{1.9900}}$$

Regresión múltiple

En algunos casos, los datos experimentales provienen de una variable dependiente sobre la que influyen dos o más variables independientes. Como explica (Chapra & Canale, 2015), en estos casos el **método de regresión lineal múltiple** es útil.

El método utiliza la siguiente ecuación para el ajuste de los datos, convirtiendo la línea de regresión en un plano:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

donde los coeficientes se encuentran resolviendo un sistema de ecuaciones representado en la siguiente forma matricial, donde n es la cantidad de datos:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix}$$

La ecuación anterior es para casos bidimensionales, sin embargo, esto puede extenderse para m dimensiones:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m$$

Ejemplo: Ajustar los siguientes datos utilizando la regresión múltiple:

x_1	x_2	y
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
1	3	0
4	6	3
7	2	27

- **Solución:**
  Se completa la siguiente tabla y se obtienen las sumatorias:

	x_1	x_2	y	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
	0	0	5	0	0	0	0	0
	2	1	10	4	1	2	20	10
	2.5	2	9	6.25	4	5	22.5	18
	1	3	0	1	9	3	0	0
	4	6	3	16	36	24	12	18
	7	2	27	49	4	14	189	54
Σ	**16.5**	**14**	**54**	**76.25**	**54**	**48**	**243.5**	**100**

Se ubican los valores en la forma matricial y se obtiene la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$6a_0 + 16.5a_1 + 14a_2 = 54$$
$$16.5a_0 + 76.25a_1 + 48a_2 = 243.5$$
$$14a_0 + 48a_1 + 54a_2 = 100$$

$$a_0 = 5$$
$$a_1 = 4$$
$$a_2 = -3$$

Se reemplazan los coeficientes en la ecuación para obtener el ajuste de los datos:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$$\boldsymbol{y = 5 + 4x_1 - 3x_2}$$

Integración numérica

En la segunda sección del Capítulo III se estudiarán los métodos de integración numérica, basado en las fórmulas de Newton-Cotes. Como explica (Khoury & Harder, 2016), la integración numérica tiene importantes aplicaciones en el estudio de modelos de fenómenos físicos reales y debido a ello, es necesario estudiar estas fórmulas.

Las fórmulas que se estudiarán corresponden a formas cerradas: la regla del trapecio, la regla de Simpson y la regla de Simpson. Se presentarán sus correspondientes representaciones gráficas para facilitar la comprensión de cada fórmula y se resolverán ejemplos para cada uno de ellos.

Introducción

Cuando se habla de integración numérica, las **fórmulas de Newton-Cotes** permiten aproximar el valor de una integral a partir de una serie de puntos equidistantes, a través de la interpolación de un polinomio con esos puntos y calculando el área (Khoury & Harder, 2016).

Como explica (Chapra & Canale, 2015), en lugar de utilizar una función complicada o datos tabulados, se usa un polinomio de aproximación que es fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

donde $f_n(x)$ es un polinomio que tiene la siguiente forma y en donde n es el grado del polinomio:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

Las fórmulas de Newton-Cotes pueden clasificarse en dos tipos: abiertas y cerradas. Las fórmulas de integración abiertas son aquellas en las que los límites de integración van más allá del primer y último punto equidistantes, mientras que las fórmulas de integración cerradas son aquellas en las que el primer y último punto equidistantes son también los límites de integración.

En las siguientes figuras se muestra una representación gráfica de las fórmulas de integración abiertas (***Figura 6***) y cerradas (***Figura 7***).

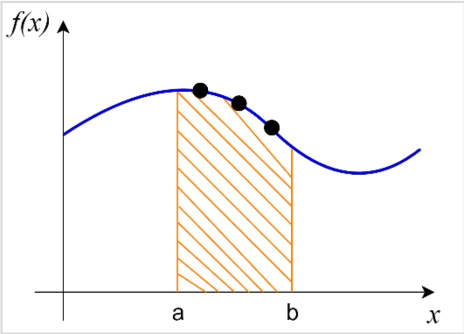


Figura 6. Representación gráfica de las fórmulas de integración abiertas. Elaboración propia.

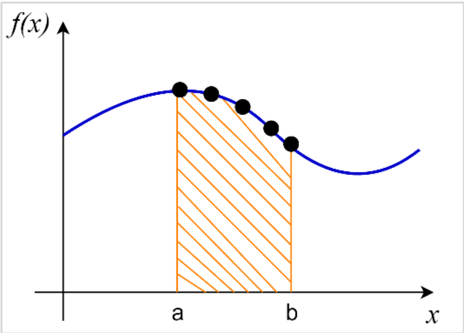


Figura 7. Representación gráfica de las fórmulas de integración cerradas. Elaboración propia.

En este documento se describirán las fórmulas de integración cerradas.

Regla trapezoidal

La **regla trapezoidal** o **regla del trapecio** es la forma más simple de aproximación de una integral cuando sólo se tienen dos medidas del sistema y como explica (Khoury & Harder, 2016), consiste en interpolar un polinomio entre dos puntos a través de una línea recta diagonal, y luego se calcula el área que resulta bajo la forma del trapezoide. Esto puede observarse gráficamente en la ***Figura 8***, en donde x_0 y x_1 son los puntos que unen a la línea recta y son los límites de la integral:

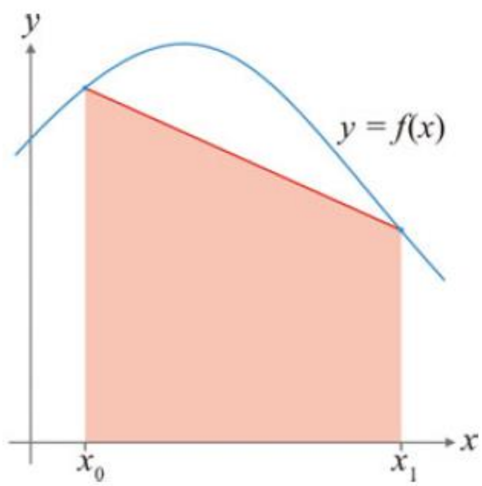


Figura 8. Ejemplo de la regla del trapecio. Tomado de (Khoury & Harder, 2016).

La regla del trapecio se obtiene cuando en la siguiente ecuación, se sustituye un polinomio de interpolación de primer grado:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$$

donde:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Ecuación que representa la línea recta diagonal

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

Aproximación de la integral que representa el área bajo la línea recta

Esto da como resultado la regla del trapecio, a la que corresponde la siguiente fórmula:

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Ejemplo: Integrar la siguiente función utilizando la regla del trapecio:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

- **Solución:** Se evalúa la función en los puntos a y b en el polinomio dado.

  Evaluando en $a = 0$:
  $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
  $f(0) = 0.2 + 25(0) - 200(0)^2 + 675(0)^3 - 900(0)^4 + 400(0)^5$
  $f(0) = 0.2$

  Evaluando en $b = 0.8$:
  $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
  $f(0.8) = 0.2 + 25(0.8) - 200(0.8)^2 + 675(0.8)^3 - 900(0.8)^4 + 400(0.8)^5$
  $f(0.8) = 0.232$

  A continuación, los valores obtenidos se reemplazan en la regla del trapecio:

  $$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

  $$I = (0.8 - 0)\left(\frac{0.2 + 0.232}{2}\right)$$

  $$\boldsymbol{I = 0.1728}$$

Regla de Simpson 1/3

La **regla de Simpson 1/3** consiste en hacer una aproximación con más de dos medidas, por lo que es posible interpolar un polinomio de mayor grado y por consiguiente, se puede obtener una aproximación más exacta de la función (Khoury & Harder, 2016). Si se tienen tres puntos equidistantes, se puede interpolar un polinomio de segundo grado y el área a calcular es el que se encuentra debajo de la parábola que se forma con el polinomio. Esto puede observarse gráficamente en la ***Figura 9***, en donde se pueden observar los tres puntos unidos por una parábola y el área sombreada corresponde al área que se va a calcular.

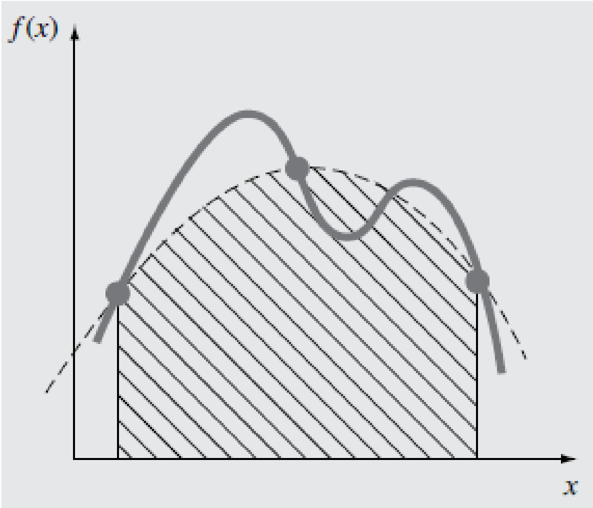


Figura 9. Ejemplo de la regla de Simpson 1/3. Tomado de (Chapra & Canale, 2015).

La regla de Simpson 1/3 se obtiene cuando en la siguiente ecuación, se sustituye un polinomio de interpolación de segundo grado:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

donde a y b pueden denotarse como x_0 y x_2, y $f_2(x)$ puede representarse con un polinomio de Lagrange de segundo grado, transformándose la integral en:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx$$

Esto da como resultado la regla de Simpson 1/3, a la que corresponde la siguiente fórmula:

$$I \cong (x_2 - x_0)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

donde x_1 se obtiene con la siguiente ecuación:

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

Ejemplo: Integrar la siguiente función utilizando la regla de Simpson 1/3:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $x_0 = 0$ hasta $x_2 = 0.8$.

- **Solución:** Se obtiene el valor de x_1 y posteriormente se evalúan los puntos x_0, x_1 y x_2 en el polinomio dado:

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

$$x_1 = \frac{0 + 0.8}{2}$$

$$x_1 = 0.4$$

Evaluando en $x_0 = 0$:
$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$
$$f(0) = 0.2 + 25(0) - 200(0)^2 + 675(0)^3 - 900(0)^4 + 400(0)^5$$
$$f(0) = 0.2$$

Evaluando en $x_1 = 0.4$:
$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$
$$f(0.4) = 0.2 + 25(0.4) - 200(0.4)^2 + 675(0.4)^3 - 900(0.4)^4 + 400(0.4)^5$$
$$f(0.4) = 2.456$$

Evaluando en $x_2 = 0.8$:
$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$
$$f(0.8) = 0.2 + 25(0.8) - 200(0.8)^2 + 675(0.8)^3 - 900(0.8)^4 + 400(0.8)^5$$
$$f(0.8) = 0.232$$

A continuación, los valores obtenidos se reemplazan en la regla de Simpson 1/3:
$$I \cong (x_2 - x_0)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

$$I \cong (0.8 - 0)\left(\frac{0.2 + 4(2.456) + 0.232}{6}\right)$$

$$\boldsymbol{I \cong 1.3675}$$

Regla de Simpson 3/8

La **regla de Simpson 3/8** permite integrar una aproximación de un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos (Chapra & Canale, 2015). Esto puede representarse gráficamente en la ***Figura 10***, en donde el área sombreada corresponde al área que se va a calcular:

FIGURA

La integral se representa como:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$$

a partir de la cual se obtiene la siguiente ecuación:

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Donde:

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

Denotando los valores de a y b como x_0 y x_3, se obtiene que:

$$h = \frac{(x_3 - x_0)}{3}$$

A partir de lo anterior, se obtiene la regla de Simpson 3/8, a la que corresponde la siguiente fórmula:

$$I \cong (x_3 - x_0)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

Como explica (Chapra & Canale, 2015), la regla de Simpson 3/8 es más exacta que la regla de Simpson 1/3.

Ejemplo: Integrar la siguiente función utilizando la regla de Simpson 3/8:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $x_0 = 0$ hasta $x_3 = 0.8$.

- **Solución:** Como se requieren cuatro puntos equidistantes, se calcula el valor de la h que existe entre ellos:

$$h = \frac{(x_3 - x_0)}{3}$$

$$h = \frac{(0.8 - 0)}{3}$$

$$h = 0.2667$$

A continuación, se obtienen los puntos x_1 y x_2:

$$x_1 = x_0 + h \qquad\qquad x_2 = x_1 + h$$

$$x_1 = 0 + 0.2667 \qquad\qquad x_2 = 0.2667 + 0.2667$$

$$x_1 = 0.2667 \qquad\qquad x_2 = 0.5334$$

Se evalúa la función en los puntos x_0, x_1, x_2 y x_3 en el polinomio dado.

Evaluando en $x_0 = 0$:
$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
$f(0) = 0.2 + 25(0) - 200(0)^2 + 675(0)^3 - 900(0)^4 + 400(0)^5$
$f(0) = 0.2$

Evaluando en $x_1 = 0.2667$:
$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
$f(0.2667) = 0.2 + 25(0.2667) - 200(0.2667)^2 + 675(0.2667)^3 - 900(0.2667)^4 + 400(0.2667)^5$
$f(0.2667) = 1.4329$

Evaluando en $x_2 = 0.5334$:
$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
$f(0.5334) = 0.2 + 25(0.5334) - 200(0.5334)^2 + 675(0.5334)^3 - 900(0.5334)^4 + 400(0.5334)^5$
$f(0.5334) = 3.4874$

Evaluando en $x_3 = 0.8$:
$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
$f(0.8) = 0.2 + 25(0.8) - 200(0.8)^2 + 675(0.8)^3 - 900(0.8)^4 + 400(0.8)^5$
$f(0.8) = 0.232$

A continuación, los valores obtenidos se reemplazan en la regla de Simpson 3/8:

$$I \cong (x_3 - x_0)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

$$I \cong (0.8 - 0)\left(\frac{0.2 + 3(1.4329) + 3(3.4874) + 0.232}{8}\right)$$

$$\boldsymbol{I \cong 1.5193}$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias

En la tercera sección del Capítulo III se estudiarán los métodos para la integración numérica de ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Los métodos que se describirán son el método de Euler, el método corrector-predictor y el método de Runge-Kutta. Cada método se presentará con sus correspondientes fórmulas y representaciones gráficas y posteriormente, se resolverán ejemplos que faciliten la comprensión de cada método.

Método de Euler

El **método de Euler** utiliza la pendiente (primera derivada) para predecir un nuevo valor de y y luego extrapolar de forma lineal sobre el tamaño de paso h (Chapra & Canale, 2015). La pendiente se aproxima a partir de un intervalo inicial y, como explica (De la Fuente O'Connor, 2017), con ello se obtiene un nuevo punto en el que se reevalúa la pendiente y así sucesivamente.

Se puede obtener una estimación directa de la pendiente a partir de la primera derivada:

$$\emptyset = f(x_i, y_i)$$

la cual se sustituye en la fórmula del método de Euler, como describe (Chapra & Canale, 2015):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \longrightarrow$$

Donde:

- $f(x_i, y_i)$ es la ecuación diferencial evaluada en los puntos x_i y y_i. Es la pendiente en cada punto.
- h es el tamaño de paso o distancia de la inclinación de la pendiente.

En la ***Figura 11*** se muestra la representación gráfica del método de Euler:

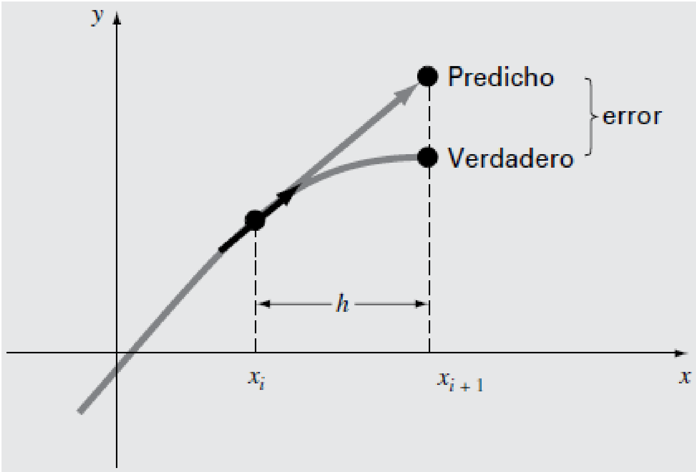


Figura 10. Representación gráfica del método de Euler. Tomado de (Chapra & Canale, 2015).

Ejemplo: Integre la ecuación:

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

utilizando el método de Euler, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, con un tamaño de paso de 0.5 y con una condición inicial de $y = 1$ en $x = 0$.

- **Solución:** La ecuación $f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ es la primera derivada y es la que se utilizará para estimar la pendiente.

  Se obtienen los puntos faltantes, es decir, x_1 y x_2, utilizando el tamaño de paso con la siguiente fórmula:

  $$x_{i+1} = x_i + h$$

  Reemplazando en la fórmula anterior, se obtiene que:

$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_1 + h$
$x_1 = 0 + 0.5$	$x_2 = 0.5 + 0.5$
$\boldsymbol{x_1 = 0.5}$	$\boldsymbol{x_2 = 1}$

  A continuación, se evalúa x_i y y_i en la pendiente y se reemplaza en la fórmula del método de Euler. Como indica el problema dado, este proceso se realiza en cada iteración desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

  Iteración #1: Partiendo de los puntos iniciales $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$, se evalúa la pendiente:

$f(x_0, y_0) = -2{x_0}^3 + 12{x_0}^2 - 20x_0 + 8.5$
$f(x_0, y_0) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5$
$\boldsymbol{f(x_0, y_0) = 8.5}$

Reemplazando en la fórmula del método de Euler:
$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$
$y_1 = 1 + (8.5)(0.5)$
$\boldsymbol{y_1 = 5.25}$

Iteración #2: Tomando los valores de la Iteración 1, se reevalúa la pendiente en $x_1 = 0.5$ y $y_1 = 5.25$:

$f(x_1, y_1) = -2{x_1}^3 + 12{x_1}^2 - 20x_1 + 8.5$
$f(x_1, y_1) = -2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5$
$\boldsymbol{f(x_1, y_1) = 1.25}$

Reemplazando en la fórmula del método de Euler:
$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$
$y_2 = 5.25 + (1.25)(0.5)$
$\boldsymbol{y_2 = 5.875}$

Iteración #3: Tomando los valores de la Iteración 2, se reevalúa la pendiente en $x_2 = 1$ y $y_2 = 5.875$:

$f(x_2, y_2) = -2{x_2}^3 + 12{x_2}^2 - 20x_2 + 8.5$
$f(x_2, y_2) = -2(1)^3 + 12(1)^2 - 20(1) + 8.5$
$\boldsymbol{f(x_2, y_2) = -1.5}$

Reemplazando en la fórmula del método de Euler:
$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$
$y_3 = 5.875 + (-1.5)(0.5)$
$\boldsymbol{y_3 = 5.125}$

Método de Euler modificado: Corrector-predictor

El **método corrector-predictor**, también llamado **método de Heun**, es una mejora del método de Euler, ya que como describe (Chapra & Canale, 2015), uno de los motivos de error en el método de Euler es asumir que la pendiente en el intervalo inicial es igual en todo el intervalo.

El método de Heun estima la pendiente haciendo la determinación de dos derivadas en el intervalo: una en el punto inicial (corrector) y una en el punto final (predictor). Posteriormente, como explica (Chapra & Canale, 2015), se obtiene un promedio de ambas derivadas con el fin de calcular una mejor estimación de la pendiente.

En las figuras presentadas a continuación, se muestran las representaciones gráficas de la ecuación predictora (***Figura 12***) y la ecuación correctora (***Figura 13***).

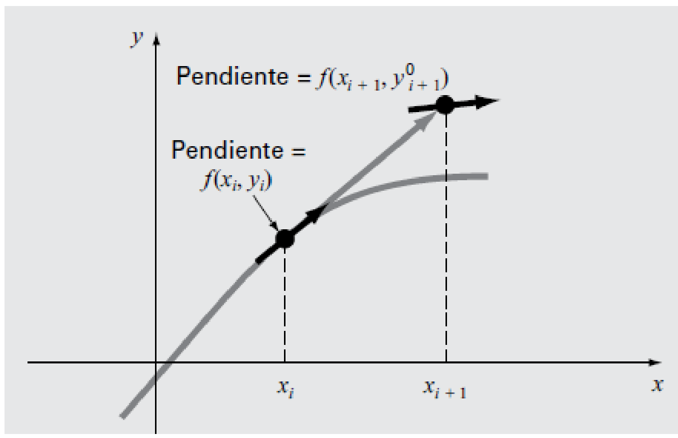


Figura 11. Representación gráfica de la ecuación predictora. Tomado de (Chapra & Canale, 2015).

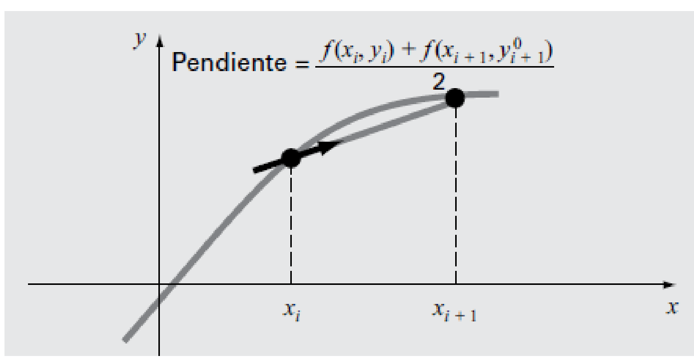


Figura 12. Representación de la ecuación correctora. Tomado de (Chapra & Canale, 2015).

Para determinar la derivada en el punto final del intervalo se utiliza la **ecuación predictora**, la cual brinda estimación de y_{i+1} (Chapra & Canale, 2015):

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Para determinar la derivada en el punto inicial del intervalo se utiliza la **ecuación correctora**, la cual permite hacer una extrapolación lineal desde y_i hasta y_{i+1} con el método de Euler (Chapra & Canale, 2015):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)\right)$$

Ejemplo: Integre la ecuación:

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

utilizando el método de Heun, desde $x = 0$ hasta $x = 2$, con un tamaño de paso de 1 y con una condición inicial de $y = 2$ en $x = 0$.

- **Solución:** La ecuación $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$ es la primera derivada de la ecuación que da la solución exacta. Esta ecuación es la que se utilizará en la ecuación correctora y en la ecuación predictora. Por lo tanto:

  $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$
  $\boldsymbol{f(x_i, y_i) = 4e^{0.8x} - 0.5y}$

  Se obtienen los puntos faltantes, es decir, x_1 y x_2, utilizando el tamaño de paso con la siguiente fórmula:

  $$x_{i+1} = x_i + h$$

  Reemplazando en la fórmula anterior, se obtiene que:

$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_1 + h$
$x_1 = 0 + 1$	$x_2 = 1 + 1$
$\boldsymbol{x_1 = 1}$	$\boldsymbol{x_2 = 2}$

  A continuación, se evalúa x_i y y_i en la pendiente y se reemplaza primero en la ecuación predictora y luego en la ecuación correctora. Como indica el problema dado, este proceso se realiza en cada iteración desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

  Iteración #1: Partiendo de los puntos iniciales $x_0 = 0$ y $y_0 = 2$, se evalúa la pendiente:

  $f(x_0, y_0) = 4e^{0.8x_0} - 0.5y_0$

  $f(x_0, y_0) = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2)$

$$\boldsymbol{f(x_0, y_0) = 3}$$

Reemplazando en la ecuación predictora:

$$y_1^0 = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

$$y_1^0 = 2 + (3)(1)$$

$$\boldsymbol{y_1^0 = 5}$$

Evaluando nuevamente en la pendiente, con el nuevo intervalo con $x_1 = 1$ y $y_1^0 = 5$:

$$f(x_0, y_1^0) = 4e^{0.8x_0} - 0.5y_1^0$$

$$f(x_0, y_1^0) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5)$$

$$\boldsymbol{f(x_0, y_1^0) = 6.4022}$$

Reemplazando en la ecuación correctora:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^0)\right)$$

$$y_1 = 2 + \frac{1}{2}(3 + 6.4022)$$

$$\boldsymbol{y_1 = 6.7011}$$

Iteración #2: Tomando los valores de la Iteración 1, se reevalúa la pendiente en $x_1 = 1$ y $y_1 = 6.7011$:

$$f(x_1, y_1) = 4e^{0.8x_1} - 0.5y_1$$

$$f(x_1, y_1) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.7011)$$

$$\boldsymbol{f(x_1, y_1) = 5.5516}$$

Reemplazando en la ecuación predictora:

$y_2^0 = y_1 + f(x_1, y_1)h$

$y_2^0 = 6.7011 + (5.5516)(1)$

$\boldsymbol{y_2^0 = 12.2527}$

Evaluando nuevamente en la pendiente, con el nuevo intervalo con $x_2 = 2$ y $y_2^0 = 12.2527$:

$f(x_2, y_2^0) = 4e^{0.8x_2} - 0.5y_2^0$

$f(x_2, y_2^0) = 4e^{0.8(2)} - 0.5(12.2527)$

$\boldsymbol{f(x_2, y_2^0) = 13.6858}$

Reemplazando en la ecuación correctora:

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^0)\right)$

$y_1 = 6.7011 + \frac{1}{2}(5.5516 + 13.6858)$

$\boldsymbol{y_1 = 16.3198}$

Método de Runge-Kutta

Los **métodos de Runge-Kutta** son una familia de métodos que logran la precisión del método de la serie de Taylor, pero sin que sea necesario calcular derivadas de orden superior (Chapra & Canale, 2015) (De la Fuente O'Connor, 2017). La ecuación general del método de Runge-Kutta es la siguiente:

$y_{i+1} = y_i + \emptyset(xi, yi, h)h$ → Donde:

- $\emptyset(xi, yi, h)$ se denomina función incremento y es una pendiente representativa en el intervalo.
- h es el tamaño de paso o distancia de la inclinación de la pendiente.

Como explica (Chapra & Canale, 2015), el método de Runge-Kutta de cuarto orden es el más utilizado comúnmente y su ecuación es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Cada una de las k representa una pendiente y por lo tanto, la ecuación del método de Runge-Kutta de cuarto orden representa un promedio de esas pendientes para establecer la mejor pendiente (Chapra & Canale, 2015). En la ***Figura 14***, se muestra la representación gráfica del método de Runge-Kutta de cuarto orden.

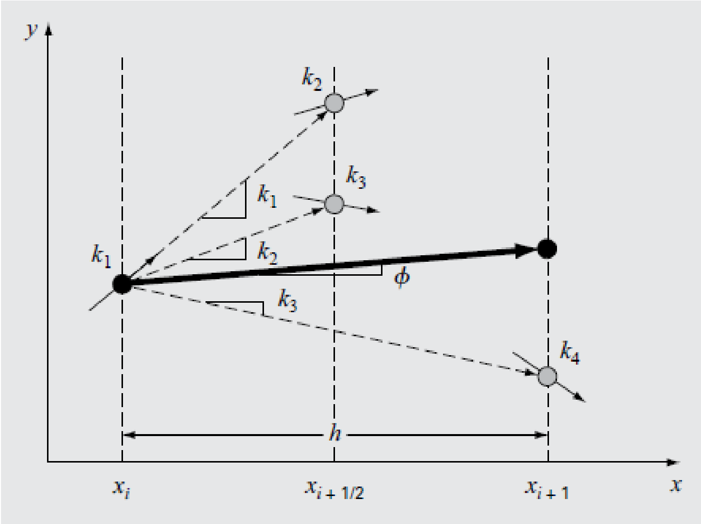


Figura 13. Representación gráfica del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Tomado de (Chapra & Canale, 2015).

Ejemplo #1: Integre la ecuación:

$$f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

utilizando el método de Runge-Kutta, usando un tamaño de paso de 0.5 y con una condición inicial de $y_0 = 2$ en $x_0 = 0$.

- **Solución:** Tomando en cuenta las condiciones iniciales, se calculan las k:

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$
$$k_1 = 4e^{0.8x_0} - 0.5y_0$$
$$k_1 = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2)$$
$$\boldsymbol{k_1 = 3}$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_2 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.5), 2 + \frac{1}{2}(3)(0.5)\right)$$
$$k_2 = f(0.25, 2.75)$$
$$k_2 = 4e^{0.8(0.25)} - 0.5(2.75)$$
$$\boldsymbol{k_2 = 3.5106}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$
$$k_3 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.5), 2 + \frac{1}{2}(3.5106)(0.5)\right)$$
$$k_3 = f(0.25, 2.8777)$$
$$k_3 = 4e^{0.8(0.25)} - 0.5(2.8777)$$
$$\boldsymbol{k_3 = 3.4468}$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3 h)$$
$$k_4 = f(0 + 0.5, 2 + (3.4468)(0.5))$$
$$k_4 = f(0.5, 3.7234)$$
$$k_4 = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(3.7234)$$
$$\boldsymbol{k_4 = 4.1056}$$

Las k obtenidas se reemplazan en la ecuación del método de Runge-Kutta:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$
$$y_1 = 2 + \frac{1}{6}(3 + 2(3.5106) + 2(3.4468) + 4.1056)(0.5)$$
$$\boldsymbol{y_1 = 3.7517}$$

Ejemplo #2: Integre la ecuación:

$$f(x,y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

utilizando el método de Runge-Kutta, usando un tamaño de paso de 0.5 y con una condición inicial de $y_0 = 1$ en $x_0 = 0$.

- **Solución:** Tomando en cuenta las condiciones iniciales, se calculan las k:

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$
$$k_1 = -2{x_0}^3 + 12{x_0}^2 - 20x_0 + 8.5$$
$$k_1 = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5$$
$$\boldsymbol{k_1 = 8.5}$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_2 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.5), 1 + \frac{1}{2}(8.5)(0.5)\right)$$
$$k_2 = f(0.25, 3.125)$$
$$k_2 = -2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5$$
$$\boldsymbol{k_2 = 4.2188}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$
$$k_3 = f\left(0 + \frac{1}{2}(0.5), 1 + \frac{1}{2}(4.2188)(0.5)\right)$$
$$k_3 = f(0.25, 2.0547)$$
$$k_3 = -2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5$$
$$\boldsymbol{k_3 = 4.2188}$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3 h)$$
$$k_4 = f(0 + 0.5, 1 + (4.2187)(0.5))$$
$$k_4 = f(0.5, 3.1094)$$
$$k_4 = -2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5$$
$$\boldsymbol{k_4 = 1.25}$$

Las k obtenidas se reemplazan en la ecuación del método de Runge-Kutta:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(8.5 + 2(4.2188) + 2(4.2188) + 1.25)(0.5)$$

$$\boldsymbol{y_1 = 3.2187}$$

Bibliografía

Baldor, A. (2005). *Álgebra* (1st ed.). México: Publicaciones Cultural.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros* (7th ed.). McGraw-Hill.

Cortés Rosas, J. J., González Cárdenas, M. E., Pinilla Morán, V. D., Salazar Moreno, A., & Tovar Pérez, V. H. (2019). Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel. Retrieved from https://www.ingenieria.unam.mx/pinilla/PE105117/pdfs/tema3/3-3_metodos_jacobi_gauss-seidel.pdf

De la Fuente O'Connor, J. L. (2017). *Ingeniería de los Algoritmos y Métodos Numéricos: Un acercamiento práctico avanzado a la computación científica e ingenieril con MATLAB* (2nd ed.). Editorial Círculo Rojo.

Epperson, J. E. (2013). *An Introduction to Numerical Methods and Analysis* (2nd ed.). Wiley.

Figueras, J.-L. (2014). *Applied mathematics*.

Gerald, C. F., & Wheatley, P. O. (2004). *Applied Numerical Analysis* (7th ed.). Pearson Education.

Grossman, S. I., & Flores Godoy, J. J. (2012). *Álgebra Lineal* (7th ed.). McGraw-Hill.

Khoury, R., & Harder, D. W. (2016). *Numerical Methods and Modelling for Engineering*. Springer.

Martínez de Lejarza, J., & Martínez de Lejarza, I. (2010). Regresión. MIT OpenCourseWare.

Mathews, D., Brown, P., Evans, M., & Hunt, D. (2013). *Polynomials – A guide for teachers (Years 11–12)*. Education Services Australia.

Nakamura, S. (1992). *Metodos Numéricos Aplicados con Software* (1st ed.). Pearson Prentice Hall.

OpenStax. (2017). *College Algebra*. Rice University.

Santamaría, P. (2009). *Representación de los números en la computadora*.

Anexos 1: Pruebas Rápidas

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

MÉTODOS NUMÉRICOS

ASIGNACIÓN #1

1. Calcule el valor decimal para los siguientes números. **(20 PUNTOS)**

   a. 1011_2
   b. 1745_8
   c. 1100_2
   d. 3710_8

2. Evalúe las diferencias Y = B – A con los siguientes valores. **(20 PUNTOS)**

   a. A= 4892 B = 2984
   b. A= 7980 B = 3251
   c. A= 1100 B = 1001
   d. A= 1010 B = 1101

3. Realice las siguientes operaciones con punto flotante. **(20 PUNTOS)**

   a. $0.4396 \times 10^{-2} + 0.5932 \times 10^{-1}$
   b. $0.2768 \times 10^{4} - 0.3840 \times 10^{-2}$
   c. $0.3497 \times 10^{-3} \div 0.1562 \times 10^{-4}$
   d. $0.1417 \times 10^{-6} \times 0.7813 \times 10^{4}$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

MÉTODOS NUMÉRICOS

ASIGNACIÓN #2

4. Calcular el error absoluto y el error relativo para los siguientes valores. **(10 PUNTOS)**

   a. Vv = 3.7648 cuando Vv es redondeado a dos posiciones decimales.
   b. Vv = 6.4384 cuando Vv es redondeado a dos posiciones decimales.

5. Use la expansión de la Serie de Taylor desde 0 hasta cuatro para aproximar la función

$$f(x) = 2x^4 – 5x^3 + 3x^2 - 6x + 10$$

desde $x_i = 2$. Estime el valor de la función en $x_{i+1} = 4$. **(20 PUNTOS)**

3. Use la expansión de la Serie de Taylor desde cero hasta tres para aproximar la función

$$f(x) = (2x^2 + 6)(3x + 2)$$

desde $x_i = 0.5$. Estime el valor de la función en $x_{i+1} = 2$. **(20 PUNTOS)**

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

MÉTODOS NUMÉRICOS

ASIGNACIÓN #3

6. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x + 3y - z &= 7 \\ -2x - 4y + 5z &= 5 \\ x + 2y + 6z &= 23 \end{aligned}$$

Utilizando:

e. El método de Gauss **(20 PUNTOS)**
f. El método de Gauss Jordan **(20 PUNTOS)**
g. El método de Doolittle **(20 PUNTOS)**

7. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 12x + 3y - z &= -2 \\ -4x + 11y + 3z &= -3 \\ -2x - 3y - 12z &= -2 \end{aligned}$$

Utilizando:

a. El método de Jacobi **(20 PUNTOS)**
b. El método de Gauss Seidel **(20 PUNTOS)**

Partiendo de $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 0$. Aplique dos iteraciones.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS
ASIGNACIÓN #4

Grupo: ____________________Fecha: ________________**Puntos obtenidos:** $\frac{\quad}{100}$
Nombre: ____________________________________Cédula: __________________

Llene los valores en cada tabla correspondientes a la respuesta correcta para el problema dado. Justifique sus respuestas mediante la realización de los problemas paso a paso en páginas adicionales.

1. Calcule la raíz de la función $f(x) = x^3 - 1$ usando $x_l = 0.5$, $x_u = 1$. Calcule su respuesta hasta que el error sea menor de 5%. Utilice el método de Bisección. **(25 PUNTOS)**

x_l	x_u	x_r	$f(x_l)$	$f(x_r)$	$f(x_l)\ f(x_r)$	E_s

2. Calcule la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$ usando $x_l = 0$, $x_u = 1$. Calcule su respuesta hasta que el error sea menor de 1%. Utilice el método de Falsa Posición. **(25 PUNTOS)**

x_l	x_u	x_r	$f(x_l)$	$f(x_u)$	$f(x_r)$	$f(x_l)\ f(x_r)$	E_s

3. Calcule la raíz de la función $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 10$ por el método de Newton Raphson usando $x_0 = 2$. Haga tres iteraciones. **(25 PUNTOS)**

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}

4. Calcule la raíz de la función $f(x) = 2x^3 + 4x^2 +10$ por el método de la Secante usando $x_{-1} =1$, $x_0 = 2$. Haga tres iteraciones. **(25 PUNTOS)**

x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS
LABORATORIO #1

Grupo: ____________________ Fecha: _________________ **Puntos obtenidos:** $\frac{\quad}{100}$

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

ENUNCIADO:
Utilizando Excel escriba las fórmulas que le permiten resolver por la eliminación de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} X + 2Y + Z &= 6 \\ 2X + Y + 2Z &= 6 \\ X + 2Y + 2Z &= 7 \end{aligned}$$

El resultado debe ser anotado utilizando matrices, en donde, en una matriz ubicada en la parte izquierda de su página se debe anotar la matriz obtenida al eliminar la primera incógnita del sistema y al lado las fórmulas por medio de las cuales el programa obtuvo dicho resultado.

El laboratorio debe ser evaluado en grupo antes de finalizar la clase.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS
LABORATORIO #2

Grupo: ________________________ Fecha: _________________

Puntos obtenidos: $\frac{\quad}{100}$

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

ENUNCIADO:
Programe el método de Gauss Jordan que permita resolver el sistema que será asignado en clases el día de la evaluación del proyecto.

Indicaciones:

- El sistema constará de tres incógnitas.
- El programa debe de poder leer el sistema y generar las matrices resultantes de cada paso para obtener la matriz identidad.
- El programa se debe realizado en grupo.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS
LABORATORIO #3

Grupo: ____________________ Fecha: ________________ **Puntos obtenidos:** $\frac{\quad}{100}$

Nombre: _________________________________ Cédula: ___________________

Nombre: _________________________________ Cédula: ___________________

Nombre: _________________________________ Cédula: ___________________

Nombre: _________________________________ Cédula: ___________________

ENUNCIADO:
Programe el método de Doolittle que permita resolver el sistema que será asignado en clases el día de la evaluación del proyecto.

Indicaciones:

- El sistema constará de tres incógnitas.
- El programa debe leer el sistema y generar las matrices U y L. También debe encontrar los valores correspondientes a los vectores de las incógnitas Y y X.
- El programa se debe realizar en grupo.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS
LABORATORIO #4

Grupo: ________________________ Fecha: ________________ **Puntos obtenidos:** $\frac{\quad}{100}$

Nombre: ________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ________________________________ Cédula: ____________________

ENUNCIADO:
Utilizando Excel escriba las fórmulas que le permiten resolver por el método de Horner el siguiente polinomio:

$$P(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + 3x - 4}{x + 2}$$

El laboratorio debe ser evaluado en grupo antes de finalizar la clase.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS COMPUTACIONALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS
LABORATORIO #5

Grupo: ________________________ Fecha: _________________

Puntos obtenidos: $\frac{\quad}{100}$

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

Nombre: ___________________________________ Cédula: ____________________

ENUNCIADO:
Programe el método de Lin-Bairstow que encuentre los valores de r y s para el polinomio que será asignado en clases el día de la evaluación del proyecto, también se darán los valores iniciales dados para dichas variables y el número de iteraciones a realizar.

Indicaciones:

- El polinomio tendrá un grado máximo de: 4.
- Los valores pueden ser enteros o reales.
- El programa se debe realizar en grupo.

PARCIAL #1
Métodos Numéricos

Nombre: ______________________________ Cédula: __________________________

Fecha: _________________________________ Profesor: Dr. Carlos Rovetto

Resuelva los siguientes problemas justificando sus resultados mediante la realización de los mismos paso a paso.

1. Resuelva las siguientes operaciones en punto flotante **(15 puntos)**
   a. $(0.3546 \times 10^5) + (0.8915 \times 10^3)$
   b. $(0.2457 \times 10^{-7}) \times (0.8915 \times 10^5)$
   c. $(0.8452 \times 10^4) \div (0.3548 \times 10^{-6})$

2. Suponiendo una localización de memoria de 32 bits. Haga la representación interna de: -48.375. **(25 puntos)**

3. Dados los siguientes valores verdaderos calcule el valor absoluto y el valor relativo truncando los mismos a 4 dígitos significativos. **(10 puntos)**
   a. 5.674895
   b. 15.45

4. Aplique dos iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver el siguiente sistema. Truncar a 5 dígitos como máximo cuando sea necesario.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - x_3 &= 27 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -61.5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -21.5 \end{aligned}$$

5. Emplee el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

BUENA SUERTE

PARCIAL #2
Métodos Numéricos

Nombre: ______________________________ Cédula: ________________

Fecha: ______________________ Profesor: Dr. Carlos Rovett0

Resuelva los siguientes problemas justificando sus resultados mediante la realización de los mismos paso a paso. Utilice cuatro (4) cifras decimales después del punto, trunque si es necesario los decimales excedentes.

1. Determine la raíz de $f(x) = 4x^3 – 6x^2 + 7x - 2.3$ utilizando el método de la falsa posición. Use los valores iniciales $x_l = 0$ y $x_u = 1$. Haga tres iteraciones. **(25 puntos)**

2. Con el método de la secante calcule la raíz de $f(x) = \frac{0.8-0.3x}{x}$. Comience con los valores iniciales $x_{-1} = 3$ y $x_0 = 1$. Haga tres iteraciones. **(25 puntos)**

3. Utilice el método de Newton-Raphson para calcular la raíz de $f(x) = x^{10} – 1$ empleando un valor inicial de $x_0 = 0.5$. Haga tres iteraciones. **(25 puntos)**

4. Dado el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 6$, usar el método de Lin-Bairstow para determinar los valores de r y s. Tomando como valores iniciales r = -2.1 y s = -1.9. Haga dos iteraciones. **(25 puntos)**

BUENA SUERTE

PARCIAL #3
Métodos Numéricos

Nombre: ____________________________ Cédula: ___________________________

Fecha: ________________________________ Profesor: Dr. Carlos Rovetto

1. Dados los puntos asociados con datos $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ y $x_3 = 9$. Estime ln 2 con un polinomio de interpolación de Newton de tercer grado. **(25 puntos)**

2. Integre la función siguiente $\int_0^3 x^2\, e^x\, dx$ utilizando la Regla del Trapecio. Utilice la versión de aplicación múltiple, con n=4. **(25 puntos)**

3. Integre la función siguiente $\int_1^2 (x + {}^1/_x)^2\, dx$ utilizando la Regla de Simpson ${}^1/_3$. Utilice la versión de aplicación múltiple, con n=4. **(25 puntos)**

4. Resuelva el siguiente problema $\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$ de valor inicial en el intervalo de t = 0 a 2, donde, y(0) = 1 utilizando el método de Euler con h = 0.5 y 0.25. **(25 puntos)**

BUENA SUERTE

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

SEMESTRAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Profesor Responsable: Dr. Carlos Rovetto **Nota Obtenida:** $\frac{\quad}{100}$

Nombre: ______________________________ Cédula: ___________________________

Grupo: _______________________ Fecha: ___________________________

Resuelva los siguientes problemas justificando sus resultados mediante la realización de los mismos paso a paso. Utilice cuatro (4) cifras decimales después del punto, trunque si es necesario los decimales excedentes.

1. Con la regla de Simpson 1/3 integre $\mathbf{f(x) = \cos x + 0.6\, x^3}$ desde x = 0.3 hasta x = 0.9.
   (20 PUNTOS)

2. Con la regla de Simpson 3/8 integre $\mathbf{f(x) = 0.8\, e^x + 0.3\, x^2}$ desde x = 0.2 hasta x = 1.4.
   (30 PUNTOS)

3. Con el método de Euler modificado integre $\mathbf{f(x, y) = \ln x + 0.7\, e^{0.3y}}$. La condición inicial es $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.5$, el tamaño de paso es 0.6. **(20 PUNTOS)**

4. Con el método clásico de Runge Kutta de cuarto orden integre $\mathbf{f(x, y) = 0.7x^2 - 0.5e^{0.6y}}$. La condición inicial es $x_0 = 0.5$, $y_0 = 2.5$, el tamaño de paso es 0.7.
   (30 PUNTOS)

BUENA SUERTE

Anexos 2: Presentaciones

Métodos Numéricos para Ingenieros

Autor: Dr. Carlos Rovetto

1

Capítulo I

2

Capítulo I: Las principales causas de los errores en la representación interna de los datos

Aritmética del computador

La computadora permite representar modelos del mundo real. Sin embargo, para poder solucionar esos modelos es imprescindible comprender cómo la computadora almacena los números en la memoria y cómo realiza operaciones con esos datos.

3

Representación interna de números:

Las matemáticas aplicadas son un rama de las matemáticas que se dedica a estudiar aquellos problemas del mundo real, para lo cual sigue las fases de resolución de problemas.

Precisión y exactitud

Dos conceptos que se deben definir dentro del estudio de los métodos numéricos son el de precisión y exactitud. (Khoury & Harder, 2016) define estos conceptos:

- Precisión: Se refiere a la cantidad de dígitos que una aproximación usa para representar un valor real.
- Exactitud: Se refiere a qué tan cercano se encuentra una aproximación de un valor real.
- Magnitud: La magnitud es una propiedad que poseen los fenómenos o las relaciones entre ellos, que permite que puedan ser medidos.

4

Aritmética de punto fijo

La representación de punto fijo consiste en almacenar un número real como una cantidad fija de dígitos, antes y después del punto, incluyendo el signo, el cual se representa con un *0* si el número es positivo y con un *1* si el número es negativo. Los sistemas de numeración que principalmente se utilizan dentro de la representación de punto fijo son el sistema decimal y el sistema binario.

- **Complemento en el Sistema Decimal**

El complemento decimal se utiliza en los cálculos que involucran números decimales. En el sistema decimal, el cálculo de los complementos se realiza en función de la base que es 10.

- **Complemento en el Sistema Binario**

En el sistema decimal, el cálculo de los complementos se realiza en función de la base que es 2.

5

Operaciones con punto flotante normalizado

Los números reales se representan en la computadora utilizando la notación científica. De esta forma, se pueden representar números reales utilizando unos pocos dígitos sobre un amplio rango de valores. Se generaliza de la siguiente forma:

$$n = f \times 10^{e}$$

Donde:

n	es el número real
f	es la fracción o mantisa
e	es un entero positive o negativo llamado exponente.

6

Adición y sustracción

A continuación, se describen las reglas para realizar las operaciones de adición y sustracción de dos números en punto flotante:

Regla #1. Si dos números tienen el mismo exponente, las mantisas se suman y usan el mismo exponente.

Regla #2. Si dos números tienen exponente diferentes, entonces uno de los números debe renormalizarse de tal manera que ambos tengan el mismo exponente antes de que se realice la operación. Por lo general, la computadora ajusta el exponente más pequeño.

7

Multiplicación

Para realizar la operación de multiplicación, se deben multiplicar las mantisas y luego sumar los exponentes.

División

Para realizar la operación de división, se deben dividir las mantisas y luego restar los exponentes.

8

Teoría del Error

El estudio de la teoría de error es imprescindible dentro del estudio de los métodos numéricos, ya que, al ser utilizados en la solución de modelos de la vida real, la existencia de errores en los cálculos puede generar consecuencias graves.

9

Tipos de errores

La computadora almacena un número limitado de cifras significativas. La mayoría de los valores numéricos almacenados y de cálculo son sólo aproximaciones de los valores verdaderos. En algunos casos, estas aproximaciones presentan cierta discrepancia o error que en los cálculos numéricos es ventajoso conocer.

Error por redondeo: El error por redondeo es aquel tipo de error en donde el número significativo de cifras después del punto decimal se ajusta a un número específico, provocando con ello un ajuste en la última cifra que se toma en cuenta.

10

Error por truncamiento: Truncar es el término que se utiliza para reducir el número de dígitos a la derecha del punto decimal, descartando los menos significativos.

Error significativo: El error significativo es aquel en donde el número de cifras significativas es algunas veces menor de lo esperado.

Error propagado: El error propagado se define como el error en la salida provocado por un error en la entrada, suponiendo que todos los cálculos intermedios se efectúan exactamente.

11

Formas de medir el error

A continuación, se describen las dos formas que existen para medir el error.

- **Error absoluto:** El error absoluto es la diferencia entre el valor de la medida y el valor real de una magnitud (valor tomado como exacto). El error absoluto se define como:

$$E_a = |V_v - V_a|$$

Donde:

V_v es el valor verdadero

V_a es el valor aproximado

12

Error relativo modificado

El error relativo es la relación que existe entre el error absoluto y la magnitud medida.

El error relativo se define como:

$$E_r = \frac{V_v - V_a}{V_v} = \frac{E_a}{V_a}$$

Donde:

- V_v es el valor verdadero
- V_a es el valor aproximado

El error relativo modificado se define como:

$$E_r = 2\left(\frac{V_v - V_a}{V_v + V_a}\right)$$

Donde:

- V_v es el valor verdadero
- V_a es el valor aproximado

13

Cálculo de error en series de potencias

La serie de Taylor proporciona un medio para predecir el valor de una función en un punto, en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto. Esta serie sirve para estimar los errores de truncamiento. La fórmula general es:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n$$

en donde: $h = x_{i+1} - x_i$

con un error de truncamiento:

$$E_t = V_v - V_a$$

Donde:

- V_v es el valor verdadero
- V_a es el valor aproximado

14

Capítulo II

15

Capítulo II: Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_n + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

Los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales se utilizan mucho en la resolución de problemas de ingeniería. Debido a esto, es conveniente estudiar diferentes métodos para resolverlos, así como comprender las diferencias entre métodos similares.

- ***Definición:*** Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de n ecuaciones con n variables desconocidas (Khoury & Harder, 2016), cuya forma general se muestra en la *Figura 1*:

16

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Método de eliminación Gaussiana

El método de eliminación gaussiana consiste en reducir la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones a la forma escalonada (matriz triangular superior), para despejar el valor de la última incógnita y finalmente, usar la sustitución hacia atrás para encontrar las demás incógnitas.

Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan es similar al método de eliminación gaussiana, ya que se utiliza el proceso de eliminación hacia adelante. Sin embargo, la matriz de coeficientes se reduce a una matriz identidad. Recordando cómo es una matriz identidad

17

- ***Método de Jacobi***

El método de Jacobi consiste en usar ecuaciones de recurrencia para obtener valores iniciales como solución, los cuales se utilizarán en la siguiente iteración y así sucesivamente, hasta que en dos iteraciones consecutivas se obtenga un margen de error preestablecido.

- ***Método de Gauss-Seidel***

El método de Gauss-Seidel es similar al método de Jacobi, ya que también es un método iterativo. Sin embargo, en el método de Gauss-Seidel, los valores nuevos en cada iteración se van sustituyendo en las ecuaciones de recurrencia conforme se van obteniendo.

- ***Método de Doolittle***

El método de Doolittle consiste en descomponer una matriz A en un producto de dos matrices LU, de la siguiente manera:

$A = LU$ Donde:

L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal

U es una matriz triangular superior

18

Raíces de funciones: algebraicas y trascendentales

El cálculo de raíces de funciones algebraicas y trascendentales se utiliza en muchos problemas de ingeniería. Debido a esto, es conveniente conocer y comprender métodos que faciliten este proceso.

- ***Métodos de aproximaciones sucesivas***

Este es un método simple para encontrar la raíz de una función, aunque no es el más eficiente, dado que en muchos casos la función no converge (Khoury & Harder, 2016). El primer paso es arreglar la ecuación $f(x) = 0$ a la forma $x = g(x)$, de modo que se obtenga una ecuación iterativa. Este paso se realiza a través de operaciones algebraicas o sumando x en ambos lados de $f(x) = 0$.

19

Métodos de aproximaciones que usan intervalos para calcular las raíces

Los métodos de aproximaciones que usan intervalos para el cálculo de raíces, también denominados métodos cerrados o de intervalos, son aquellos en los que se utiliza un intervalo cerrado $[a, c]$ dentro del cual está al menos una raíz de la ecuación que hace a $f(x) = 0$. Estos métodos emplean el cambio de signo de la función en aquellos valores cercanos a la raíz.

20

Métodos de aproximaciones que usan intervalos para calcular las raíces

- **Método de intervalo medio**

El método de intervalo medio, también denominado método de bisección o método de Bolzano, consiste en una búsqueda iterativa en el que el intervalo $[a, c]$ siempre se bisecta (divide) en dos subintervalos: $[a, b]$ y $[b, c]$. Luego, si ocurre un cambio de signo sobre alguno de los subintervalos, se evalúa la función en el punto medio del subintervalo para determinar la posición de la raíz.

- **Método de regula falsi**

El método de regula falsi, también llamado método de falsa posición o método de interpolación lineal, es similar al método de intervalo medio ya que, como describe (Nakamura, 1992), el intervalo que contiene la raíz se hace más pequeño en cada iteración. Sin embargo, el método de regula falsi es más eficiente.

21

Método abiertos para el cálculo de raíces

Los métodos abiertos para el cálculo de raíces, a diferencia de los métodos cerrados, no necesitan de un intervalo que contenga a la raíz. En los métodos abiertos se utilizan valores iniciales en una fórmula matemática que se usará en las iteraciones para determinar la raíz.

22

Método abiertos para el cálculo de raíces

- **Método de Newton-Raphson**

El método de Newton-Raphson hace uso de la evaluación analítica de las rectas tangentes (Nakamura, 1992), que van desde el punto $(x_i, f(x_i))$, para la gráfica de una función $f(x_i)$. Generalmente, el punto por el que la recta tangente corta al eje x, es una mejor aproximación de la raíz. Se utiliza la siguiente fórmula, donde $f(x_i)$ es la función y $f'(x_i)$ es la primera derivada de la función:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- **Método de la secante**

El método de la secante es un método muy similar al método de Newton-Raphson, siendo la principal diferencia que las aproximaciones se obtienen a partir de dos valores iniciales de x y no requiere de la evaluación de la primera derivada de la función en cada iteración. La fórmula de recurrencia para el cálculo de las aproximaciones a la raíz es la siguiente:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

23

Solución de polinomios

Los polinomios tienen diversas aplicaciones en la ciencia y en la ingeniería, como por ejemplo en circuitos eléctricos y en sistemas dinámicos.

- *Teorema sobre raíces de polinomios*

Un polinomio es una expresión algebraica que tiene la siguiente forma general:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde:

- la n con el valor más alto corresponde al grado
- $a_0, a_1, \dots, a_n$ son los coeficientes
- a_0 es el término constante

24

- ***División sintética: Regla de Horner***

La división sintética es un método simplificado para dividir polinomios, cuando el divisor es un binomio de la forma $(x \pm k)$, donde k es un número real (OpenStax, 2017). Su principal característica es que en el proceso de la división sólo se utilizan los coeficientes.

- ***Método de Lin-Bairstow***

El método de Bairstow es un método iterativo que permite obtener las raíces reales y complejas de un polinomio, a través de la división del polinomio entre un factor cuadrático $x^2 - rx - s$. Se utilizan los valores iniciales de iniciales r y s. Estos valores se encuentran utilizando el método de Newton-Raphson, los cuales hacen que el residuo sea cero, es decir, que se encuentran las raíces del sistema.

25

Capítulo III

26

Capítulo III: Aproximación funcional/polinomial y soluciones de una ecuación diferencial

- ***Interpolación numérica***

En la primera sección del Capítulo III se estudiarán los diferentes métodos de interpolación y regresión que más comúnmente se utilizan en ingeniería.

27

- ***Polinomio único***

El método de interpolación del polinomio único, también denominada interpolación polinomial, es el más común y consiste en determinar un polinomio único de grado n que pasa a través de todos los puntos y que se ajuste a $n + 1$ puntos asociados con los datos.

- ***Método de Lagrange***

El método de interpolación de Lagrange consiste en construir un polinomio $P_n(x)$ de grado máximo n, que pasa por $n + 1$ puntos.

Se utilizan dos formulas:

- **Primer grado:**

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

- **Segundo grado:**

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

28

Método de Newton

El método de Newton es una forma alternativa útil y muy común de expresar una interpolación polinomial.

- Diferencias divididas hacia adelante: Para un polinomio grado n se requieren $n+1$ puntos asociados con datos: $[x_0,\ f(x_0)],\ [x_1,\ f(x_1)]\ \dots,\ [x_n,\ f(x_n)]$, donde las evaluaciones de la función colocadas entre paréntesis son diferencias divididas finitas. El polinomio de grado n es:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

donde:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$ Primer diferencia dividida finita

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$ Segunda diferencia dividida finita

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}$$ n-ésima diferencia dividida finita

29

Método de Regresión: Mínimos Cuadrados

Generalmente, los datos experimentales tienen errores sustanciales. En estos casos, no es apropiado utilizar la interpolación polinomial, ya que esto puede generar resultados poco satisfactorios al intentar hacer una predicción de los valores intermedios.

Regresión lineal

El método de regresión lineal es el más simple para obtener una aproximación por mínimos cuadrados, ya que consiste en realizar un ajuste de una línea recta a un conjunto de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ Las formulas utilizadas en este método se resumen a continuación:

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	Media de x, donde n es la cantidad de datos
$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$	Media de y, donde n es la cantidad de datos
$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$	Ecuación que representa la pendiente
$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}$	Ecuación que representa la intersección con el eje y
$y = a_0 + a_1 x$	Ecuación de la línea recta

30

Métodos de Regresión: Mínimos Cuadrados

- **Regresión polinomial**

El método de regresión polinomial consiste en extender el ajuste de los datos con un polinomio de grado superior, ya que, como explica algunos datos en ingeniería muestran un patrón que no puede ser representado adecuadamente por una línea recta. En estos casos es más adecuado ajustar los datos a una curva. El método ajusta a un polinomio de segundo grado:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

31

Métodos de Regresión: Mínimos Cuadrados

- **Regresión Exponencial**

El método de regresión exponencial es un método no lireal que ajusta los datos utilizando una función exponencial y toma logaritmos para linealizar el ajuste haciendo un cambio de variables. Se utiliza la siguiente ecuación para el ajuste de los datos:

$$y = ab^x$$

Para la cual se utilizan las siguientes fórmulas:

1	$v = ln\, y$	2	$\bar{v} = \frac{\sum v}{n}$
3	$B = \frac{\frac{1}{n}\sum xv - (\bar{x})(\bar{v})}{\frac{1}{n}\sum x^2 - (\bar{x})^2} = \frac{\overline{xv} - (\bar{x})(\bar{v})}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$	4	$A = \bar{v} - B\bar{x}$
5	$a = anti\, ln\, A = e^A$	6	$b = anti\, ln\, B = e^B$

32

Métodos de Regresión: Mínimos Cuadrados

- **Regresión Potencial**

El método de regresión potencial es un método no lineal que ajusta los datos utilizando una función potencial y toma logaritmos para linealizar el ajuste haciendo un cambio de variables. Se utiliza la siguiente ecuación para el ajuste de los datos:

$$y = ax^b$$

Para la cual se utilizan las siguientes fórmulas:

1	$v = \ln y$	2	$\bar{v} = \frac{\sum v}{n}$
3	$u = \ln x$	4	$\bar{u} = \frac{\sum u}{n}$
5	$B = \frac{\frac{1}{n}\sum uv - (\bar{u})(\bar{v})}{\frac{1}{n}\sum u^2 - (\bar{u})^2} = \frac{\overline{uv} - (\bar{u})(\bar{v})}{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}$	6	$A = \bar{v} - B\bar{u}$
7	$a = anti\ln A = e^A$		

Métodos de Regresión: Mínimos Cuadrados

- **Regresión múltiple**

En algunos casos, los datos experimentales provienen de una variable dependiente sobre la que influyen dos o más variables independientes. En estos casos el método de regresión lineal múltiple es útil. El método utiliza la siguiente ecuación para el ajuste de los datos, convirtiendo la línea de regresión en un plano:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

donde los coeficientes se encuentran resolviendo un sistema de ecuaciones representado en la siguiente forma matricial, donde n es la cantidad de datos:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1y \\ \sum x_2y \end{bmatrix}$$

Integración Numérica

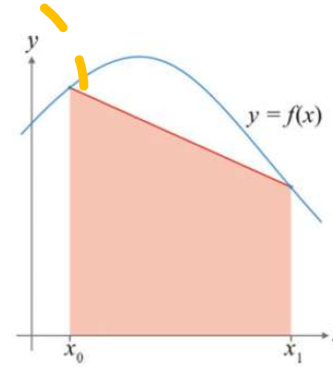
La integración numérica tiene importantes aplicaciones en el estudio de modelos de fenómenos físicos reales y debido a ello, es necesario estudiar estas fórmulas. Las fórmulas que se estudiarán corresponden a formas cerradas: la regla del trapecio, la regla de Simpson y la regla de Simpson. Se presentarán sus correspondientes representaciones gráficas para facilitar la comprensión de cada fórmula y se resolverán ejemplos para cada uno de ellos.

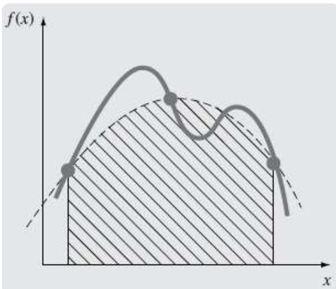
Introducción

Cuando se habla de integración numérica, las fórmulas de Newton-Cotes permiten aproximar el valor de una integral a partir de una serie de puntos equidistantes, a través de la interpolación de un polinomio con esos puntos y calculando el área.

Regla Trapezoidal

La regla trapezoidal o regla del trapecio es la forma más simple de aproximación de una integral cuando sólo se tienen dos medidas del sistema, consiste en interpolar un polinomio entre dos puntos a través de una línea recta diagonal, y luego se calcula el área que resulta bajo la forma del trapezoide. Esto puede observarse gráficamente en la Figura , en donde x_o y x_1 son los puntos que unen a la línea recta y son los límites de la integral:





Regla de Simpson 1/3

La regla de Simpson 1/3 consiste en hacer una aproximación con más de dos medidas, por lo que es posible interpolar un polinomio de mayor grado y por consiguiente, se puede obtener una aproximación más exacta de la función.

Si se tienen tres puntos equidistantes, se puede interpolar un polinomio de segundo grado y el área a calcular es el que se encuentra debajo de la parábola que se forma con el polinomio. Esto puede observarse gráficamente en la Figura , en donde se pueden observar los tres puntos unidos por una parábola y el área sombreada corresponde al área que se va a calcular.

37

Regla de Simpson 3/8

La **regla de Simpson 3/8** permite integrar una aproximación de un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos (Chapra & Canale, 2015). La integral se representa como:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$$

38

Ecuaciones diferenciales Ordinarias

En la tercera sección del Capítulo III se estudiarán los métodos para la integración numérica de ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Los métodos que se describirán son el método de Euler, el método corrector-predictor y el método de Runge-Kutta. Cada método se presentará con sus correspondientes fórmulas y representaciones gráficas y posteriormente, se resolverán ejemplos que faciliten la comprensión de cada método.

39

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Método de Euler

El método de Euler utiliza la pendiente (primera derivada) para predecir un nuevo valor de y y luego extrapolar de forma lineal sobre el tamaño de paso *h*. La pendiente se aproxima a partir de un intervalo inicial y, como explica, con ello se obtiene un nuevo punto en el que se reevalúa la pendiente y así sucesivamente.

Se puede obtener una estimación directa de la pendiente a partir de la primera derivada:

$$\emptyset = f(x_i, y_i)$$

Lacual se sustituye en la fórmula del método de Euler, como describe:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Donde:

- $f(x_i, y_i)$ es la ecuación diferencial evaluada en los puntos x_i y y_i. Es la pendiente en cada punto.
- h es el tamaño de paso o distancia de la inclinación de la pendiente.

40

Ecuaciones diferenciales ordinarias

- **Método de Euler modificado: Corrector-predictor**

El método corrector-predictor, también llamado método de Heun, es una mejora del método de Euler, ya que como describe (Chapra & Canale, 2015), uno de los motivos de error en el método de Euler es asumir que la pendiente en el intervalo inicial es igual en todo el intervalo.

41

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

- ***Método de Runge-Kutta***

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de métodos que logran la precisión del método de la serie de Taylor, pero sin que sea necesario calcular derivadas de orden superior (Chapra & Canale, 2015) (De la Fuente O'Connor, 2017). La ecuación general del método de Runge-Kutta es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \emptyset(xi, yi, h)h$$

Donde:

- $\emptyset(xi, yi, h)$ se denomina función incremento y es una pendiente representativa en el intervalo.
- h es el tamaño de paso o distancia de la inclinación de la pendiente.

42