UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

SEDE VICTOR LEVI SASSO

FOLLETO

Estructuras Discretas para la Computación

Autor:

Dr. Carlos Rovetto

FEBRERO 2022

Contenido

Índice de Figuras

Capítulo I: Conceptos de la Teoría de Conjuntos

Conceptos Básicos

Los conceptos de la teoría de conjuntos son esenciales para formar y desarrollar el pensamiento lógico y se utilizan en distintas áreas como herramientas para clasificar, ordenar y analizar los conceptos pertenecientes a una temática en específico.

Conjuntos

Se denomina conjunto a la colección o grupo de objetos. A estos objetos también se les llama elementos o miembros de un conjunto y son delimitados por llaves.

Los conjuntos se pueden definir mediante la lista de sus elementos o utilizando las propiedades o reglas que caracterizan al conjunto. Se le conoce como descripción tabular o de enumeración a la primera forma mientras que, a la segunda forma, se le denomina definición constructiva del conjunto o por comprensión. Finalmente, podemos definir el conjunto de manera gráfica utilizando los Diagramas de Venn. A continuación, se muestran ejemplos de estas formas de definición.

Ejemplo

Defina el conjunto H con los elementos f, m, q, r, s, w por

a. Enumeración
b. Diagrama de Venn

Solución

a. Enumeración
   H = {f, m, q, r, s, w}

b. Diagrama de Venn

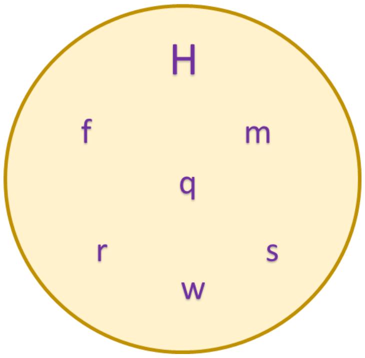


Figura 1. Diagrama de Venn del conjunto H = {f, m, q, r, s, w}. Elaboración propia.

Ejemplo

Defina por comprensión

a. el conjunto D correspondientes a los días de la semana
b. el conjunto I correspondiente a los números impares

Solución

a. D = {x | x es un día de la semana}
b. I = {x | x es impar}

Conjuntos y sus miembros

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas, mientras que para denotar a sus elementos o miembros se utilizan letras minúsculas. Por ejemplo, el conjunto A con los elementos b, c, q, n se define de la siguiente forma A = {b, c, q, n}. De forma gráfica lo podemos representar utilizado los diagramas de Venn de la siguiente forma:

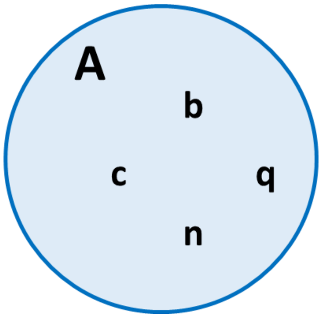


Figura 2. Diagrama de Venn del conjunto A = {b, c, q, n}. Elaboración propia.

Subconjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se dice que B es un **subconjunto** de A si todo elemento de B es también un elemento de A. Esto se expresa como B $\subset$ A.

Ejemplo

Indique si B es un subconjunto de A en los siguientes casos:

a. A = {1, 2, 3, 6, 9}, B = {3, 6, 1}
b. A = {c, d, r, f}, B = {m, p, q}

Solución

a. B es un subconjunto de A porque los elementos 3, 6 y 1 están contenidos en el conjunto A, esto es, B $\subset$ A. Gráficamente se tiene:

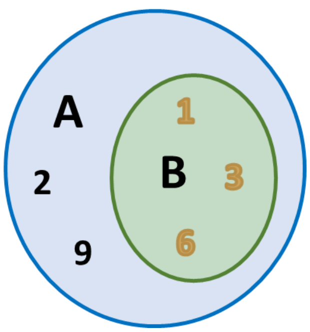


Figura 3. Diagrama de Venn de B subconjunto de A, B $\subset$ A. Elaboración propia.

b. B no es un subconjunto de A porque los elementos m, p y q no están contenidos en el conjunto A. Gráficamente se tiene:

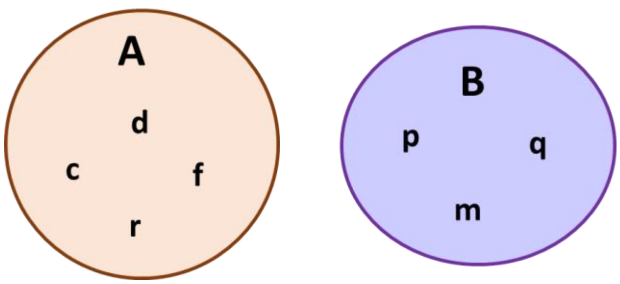


Figura 4. Diagrama de Venn de B no es un subconjunto de A, B $\not\subset$ A. Elaboración propia.

Conjunto Universal

El conjunto universal, denotado con la letra U, es el conjunto que contiene a todos los conjuntos. Se utiliza para especificar los elementos que conforman el conjunto con el cual estamos trabajando y nos permite definir al conjunto en función de un contexto dado.

Ejemplo

El conjunto U de todas las aves.

U = {x | x es un ave}

Conjunto Vacío

El conjunto vacío es un conjunto que no tiene elementos. Este conjunto se representa como ∅ o con { }.

Conjunto Finito

Cuando podemos determinar la cantidad de elementos que posee el conjunto se le denomina conjunto finito.

Conjunto Infinito

Cuando no podemos determinar la cantidad de elementos que posee el conjunto se le denomina conjunto infinito.

Cardinalidad y Conjunto Potencia

La cardinalidad es el número de elementos de un conjunto, se representa como |A|.

Ejemplo

Encuentre la cardinalidad de los siguientes conjuntos

a. A = {r, s, t}
b. B = {{c}, {e, g}}

Solución

a. |A| = 3

b. |B| = 2, el tamaño de {{c}, {e, g}} es 2 y no 3, pues tiene 2 elementos, siendo el primero {c} y el segundo {e, g}.

El **conjunto potencia** de $\mathcal{P}$(X) es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto X. El conjunto potencia de un conjunto con n elementos tiene $\mathbf{2^n}$ elementos.

Ejemplo

Encuentre el conjunto potencia P(A) del conjunto A = {a, b, c}

Solución

|A| = 3, por lo que, |P(A)| = 23 = 8.

$\mathcal{P}$(A) = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}

Operaciones de conjuntos

Las operaciones de conjuntos nos permiten obtener un conjunto luego de realizada las operaciones establecidas sobre los conjuntos, dicho de otra forma, podemos combinar o transformar los conjuntos. A estas operaciones también se les conoce como álgebra de conjuntos. En esta sección se definirán y explicarán distintas operaciones con conjuntos.

Unión

El conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B se le denomina unión de los conjuntos A y B. Se denota la unión de A y B por A U B. El conjunto resultante de esta operación tendrá a todos los elementos de A y de B, sin repetir ningún elemento.

Ejemplo

Realice la unión de los conjuntos A= {1, 2, 3, 4, 6} y B = {3, 4, 8}

Solución

A U B = {1, 2, 3, 4, 6, 8}

Intersección

La intersección de dos o más conjuntos, denotada por el símbolo ∩, es aquella en donde el conjunto resultante tiene todos los elementos que son comunes a los conjuntos involucrados en la operación. De esta forma, la operación de intersección de dos conjuntos A y B tendrá a aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B.

Ejemplo

Realice la intersección de los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 7\}$ y $B = \{3, 4, 8\}$

Solución

$A \cap B = \{3\}$

Conjunto disjuntos

Cuando dos conjuntos no tienen elementos comunes se denominan conjuntos disjuntos.

Ejemplo

Compruebe que los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ y $B = \{5, 6, 9\}$ son disjuntos.

Solución

$A \cap B = \{\ \}$ o $A \cap B = \emptyset$

Complemento relativo

A la diferencia o resta de dos conjuntos se le denomina complemento relativo. El resultado del complemento relativo de A – B es un conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A pero no a al conjunto B.

Ejemplo

Encuentre el complemento relativo, $A - B$, de $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$

Solución

$A - B = \{1, 2\}$

Diferencia simétrica

La diferencia simétrica, denotada por el símbolo □, de dos conjuntos A y B es el conjunto formado los elementos que pertenecen a uno de los dos conjuntos, pero no a ambos conjuntos.

Ejemplo

Encuentre la diferencia simétrica, $A \Delta B$, de $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$

Solución

$A \Delta B = \{1, 2, 4, 5\}$

Propiedades del Álgebra de conjuntos

Al estudio de las operaciones básicas que pueden realizarse con conjuntos se le llama álgebra de conjuntos. Algunas de estas operaciones como lo son la unión, intersección y complementación poseen propiedades similares a las operaciones con números naturales a las que se le denominan leyes del algebra de conjuntos. Estas son:

Idempotencia

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Conmutativa

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \; A$

Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Asociativa

A U (A U B) = (A U B) U C

A∩(A∩B) = (A∩B) ∩C

Ley de Morgan

(A U B)C = AC∩BC

(A∩B)C = AC U BC

Ley de diferencia

(A - B) = A∩BC

Leyes del complemento:

A U AC = U

A∩AC = ∅

(AC)C = A

AC = ∅

∅C = U

Leyes de la absorción:

A U (A ∩ B) = A

A∩ (A U B) = A

A U (AC∩ B) = A U B

A ∩ (AC U B) = A ∩ B

Principio de la adición para conjuntos disjuntos

El principio de adición es usado para contar los elementos de dos o más conjuntos. Para ello se debe primero distinguir los elementos que dichos conjuntos tengan en común, si es el caso. En este punto se tendrán los siguientes casos:

Los conjuntos no tienen elementos comunes: se suman los elementos de los conjuntos.

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Los conjuntos tienen elementos comunes: se suman los elementos de los conjuntos y se restan los elementos que tienen en común.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Si se tienen más de dos conjuntos, por ejemplo, tres conjuntos: se suma el cardinal de los conjuntos, se resta el cardinal de todas las posibles intersecciones de dos conjuntos y por último se suma el cardinal de la intersección de los tres conjuntos.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ejemplo

Utilizando el principio de adición, encuentre la cantidad de elementos de $|A \cup B|$ para los siguientes casos:

a. $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{3, 4, 5\}$
b. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

c. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{1, 4, 7\}$

Solución

a. $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{3, 4, 5\}$
   $A \cap B = \varnothing$
   $|A \cup B| = |A| + |B|$
   $|A \cup B| = 3 + 3$
   $|A \cup B| = 6$

b. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$
   $|A \cap B| = 2$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
$|A \cup B| = 4 + 3 – 2$
$|A \cup B| = 5$

c. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 7\}$
$|A \cap B| = 1$
$|A \cap C| = 1$
$|B \cap C| = 1$
$|A \cap B \cap C| = 0$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
$|A \cup B \cup C| = 3 + 3 + 3 – 1 – 1 – 1 + 0$
$|A \cup B \cup C| = 6$

Sucesiones

A la lista de elementos dispuestos en orden siguiendo una regla o patrón se le denomina sucesión. A los elementos pertenecientes a una sucesión se les llama términos. Para indicar una sucesión se usa la notación $\{a_n\}$ o (a_n). Para indicar la posición de cada término en la sucesión se utiliza un subíndice

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$

en donde, **m** es el subíndice del término inicial y **n** es el subíndice del término final al cual se le denomina término general de la sucesión.

Ejemplo

Escriba los términos y su posición de la siguiente sucesión $\{a_n\}$ = 3, 6, 9, 12, …

Solución

$a_1 = 3$

$a_2 = 6$

$a_3 = 9$

$a_4 = 12$

El término inicial en la sucesión puede tener el valor de uno o cero. A partir del término general se puede calcular la posición de cualquier término de la sucesión utilizando la siguiente fórmula $\mathbf{a_n = 2n}$.

En informática es de gran importancia las sucesiones de caracteres, letras u otros símbolos que se encuentran escritos sin las comas, a estos se les denominan **cadenas**. Las cadenas se forman sobre el conjunto de caracteres llamado **alfabeto**.

Fórmulas recursivas y explícitas

La fórmula **recursiva** o **recurrente** es aquella que para definir el término siguiente hace referencia al término anterior. Además, se deben indicar el punto de partida de la fórmula.

Ejemplo

Defina la siguiente sucesión $b_1 = 2$, $b_n = b_{n-1} + 3$

Solución

$\{\mathbf{b_n}\} = 2, 5, 8, 11, \ldots$

Cuando se indica el valor que tiene cualquier término en particular, se está utilizando las fórmulas **explícitas**.

Ejemplo

Defina la siguiente sucesión $a_n = 3n + 1$ para $1 \leq n \leq 4$

Solución

$\{\mathbf{a_n}\} = 4, 7, 10, 13$

Sucesiones finitas e infinitas

Una sucesión es finita cuando puede finalizar después de n pasos. Para encontrar los términos de una sucesión finita, hallamos los términos de la sucesión hasta el número n que se indique.

Ejemplo

Encontrar los 5 primeros términos de la siguiente sucesión finita:

(b_n) = $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$

Solución

Remplazando n = 1, 2, 3, 4, 5 tenemos

{a_n} = 1, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

Cuando sucesión continúa indefinidamente se denomina sucesión es infinita. Por ejemplo, **{a_n}** = 3, 6, 9, 12, …

Conjunto correspondiente a una sucesión

Denominamos conjunto correspondiente a una sucesión a todos los elementos distintos que constituyen la sucesión.

Ejemplo

Escriba el conjunto correspondiente a los elementos de la sucesión de los cuadrados de los números naturales

Solución

{1, 4, 9, 16, 25, 36 …}

A pesar de que es importante el orden que tienen los elementos en una sucesión, para este caso como se está trabajando con conjuntos, cuando se enlistan los elementos en el conjunto su orden no es significativamente relevante.

Función característica

Podemos definir la función característica como una regla que le asigna un valor a cada elemento de un conjunto. Este concepto es muy útil cuando se trabaja con los conjuntos.

Ejemplo

Defina la función característica f_A de A, si A es un subconjunto de un conjunto universal U

Solución

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

Cuando los valores que son asignados por la función característica son números, las funciones características se pueden sumar y multiplicar. Otro uso que tienen esta función es en la representación de conjuntos en una computadora como se verá en la siguiente sección.

Representación en computadora de conjuntos y subconjuntos

Para poder representar un conjunto o subconjunto en la computadora se debe disponer sus elementos en una sucesión. Cuando el conjunto universal U es finito y A $\subset$ U entonces podemos usar la función característica f_A para representar la sucesión de ceros y unos de determinada longitud, a la cual le podemos denominar n. En este caso la función característica le asignará un 1 a los elementos que pertenecen a A y 0 a los que no pertenecen a A.

Ejemplo

Escriba la sucesión correspondiente a la representación de la función característica f_A usando los siguientes conjuntos U = {1, 2, 3, 4, 5} y A = {2, 4, 5}

Solución

$\{a_n\}$ = 0, 1, 0,1, 1

De esta forma, por medio de la función característica podemos representar en una computadora un conjunto universal como un arreglo A de longitud n. En donde, la asignación de un 1 o un 0 en cada posición A[k] del arreglo A especifica un subconjunto que es único de U.

Ejemplo

Represente el arreglo del subconjunto A de la sucesión {an} = 0, 1, 0,1, 1 correspondiente a la representación de la función característica fA de los conjuntos U = {1, 2, 3, 4, 5} y A = {2, 4, 5}

Solución

0	1	0	1	1

Técnicas de Conteo

Las técnicas de conteo son estrategias matemáticas que se utilizan para contar varios conjuntos de objetos de gran tamaño y, en donde, dicha tarea se convierte en algo complicado.

Estas técnicas son muy usadas en probabilidad y estadística y en función de su complejidad las podemos dividir en dos grupos conformados de la siguiente forma:

1. por el principio multiplicativo y el principio aditivo
2. por las combinaciones y las permutaciones

En las siguientes secciones se explican cada una de estas técnicas.

Reglas de la suma y el producto

La ***regla de la suma*** la podemos enunciar de la siguiente forma: dados dos sucesos S1 y S2, donde S1 puede ocurrir de “a” maneras y S2 puede ocurrir de “b” maneras y se cumple que ambos sucesos no pueden ocurrir al mismo tiempo, entonces la suma de ambos sucesos puede ocurrir de a + b maneras. Se entiende que este principio puede ser extendido a más de dos sucesos.

A partir del enunciado anterior y trabajando con la teoría de conjuntos podemos aplicar el principio de la adición para conjuntos disjuntos.

La ***regla del producto*** se define de manera similar: dados dos sucesos independientes S1 y S2, donde S1 puede ocurrir de “a” maneras y S2 puede ocurrir de “b” maneras, entonces el producto de ambos sucesos puede ocurrir de a · b maneras. Se entiende que este principio puede ser extendido a más de dos sucesos.

Teoremas sobre el principio de la multiplicación

El principio de multiplicación se utiliza cuando se necesita contar los elementos de un conjunto de producto cartesiano, en donde, los elementos del conjunto con el que estamos trabajando están formados por pares de elementos.

Recordemos que en este tipo de conjuntos el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto. El teorema indica que se debe multiplicar el número de elementos de cada conjunto como se muestra en la siguiente fórmula, sean A y B dos conjuntos, para conocer la cantidad de elementos del producto cartesiano

$|A \times B| = |A| \times |B|$

También podemos generalizar esta fórmula a tres o más conjuntos:

$|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|$

Permutaciones

A la disposición en orden de los elementos de un conjunto se le conoce como permutación. En el caso de que el conjunto ya se encuentre ordenado de una forma distinta a la cual se necesita que este se encuentre ordenado, entonces se tendrá que volver a ordenar, al proceso de reorganizar sus elementos se llama permutar.

La siguiente fórmula nos permite calcular el número de permutaciones de “n” elementos tomados de “k” en “k”:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo

Tres personas se han presentado a un concurso. El concurso otorga $400 al primer lugar y $200 al segundo. ¿De cuántas formas se pueden repartir los premios de primer y segundo lugar?

Solución

Dado que en este ejemplo si importa el orden debido a que los premios son diferentes, se verifica que estamos frente a un problema de permutación. Para resolverlo tenemos que:

- n = 3 será el número total de participantes
- k = 2 serán los premios

desarrollamos la fórmula

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$P_2^3 = 6$$

Combinaciones

Cuando se hace una selección sin tener en cuenta el orden de los elementos de un conjunto se le denomina combinación.

La siguiente fórmula nos permite calcular el número de combinaciones de “n” elementos tomados de “k” en “k”:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Ejemplo 1

Dados n = 10 y k = 3, encuentre el número de combinaciones.

Solución

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!\,3!}$$

$$C_3^{10} = 120$$

Ejemplo 2

Dado un grupo de 10 personas, de estos se tiene que 4 son mujeres y 6 son hombres. Determine

a) el número de formas en que se puede elegir un representante del grupo
b) el número de formas en que se puede elegir un comité de 3 miembros, donde al menos uno de los miembros sea mujer.

Solución

a) de las 10 personas solo se elige una persona sin importar el orden

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_1^{10} = \frac{10!}{(10-1)!\,1!}$$

$$C_1^{10} = 10\,formas$$

b) en la segunda pregunta se nos solicita que al uno de los 3 miembros sea mujer nos permite tener un comité formado por 1, 2 o 3 mujeres. Por lo tanto, se deben considerar esas tres opciones en nuestro resultado. Se desarrollará cada uno de los escenarios por separado y al final se totalizarán cada resultado para encontrar el resultado final.
   1) si el comité está formado por una mujer, tendremos una combinación de 1 mujer del grupo de 4 y 2 hombres del grupo de 6.

$$C_1^4 x\, C_2^6 = \frac{4!}{(4-1)!\,1!}\ x\ \frac{6!}{(6-2)!\,2!}$$

$$C_1^4 x\ C_2^6 = \ 4\ x\ 15$$

$$C_1^4 x\ C_2^6 = \ 60\ formas$$

2) si el comité está formado por dos mujeres, tendremos una combinación de 2 mujeres del grupo de 4 y 1 hombre del grupo de 6.

$$C_2^4 x\ C_1^6 = \ \frac{4!}{(4-2)!\,2!}\ x\ \frac{6!}{(6-1)!\,1!}$$

$$C_2^4 x\ C_1^6 = \ 6\ x\ 6$$

$$C_2^4 x\ C_1^6 = \ 36\ formas$$

3) si el comité está formado por tres mujeres, tendremos una combinación de 3 mujeres del grupo de 4 y no se selecciona ningún hombre.

$$C_3^4 x\ C_0^6 = \ \frac{4!}{(4-3)!\,3!}\ x\ \frac{6!}{(6-0)!\,0!}$$

$$C_3^4 x\ C_0^6 = \ 4\ x\ 1$$

$$C_3^4 x\ C_0^6 = \ 4\ \ formas$$

En total:

60 + 36 + 4 = 100 formas tener un comité formado por 1, 2 o 3 mujeres

Capítulo II: Representación gráfica de las relaciones y funciones de un conjunto

Relaciones y grafos dirigidos

En este capítulo se estudian los conceptos fundamentales para trabajar con las relaciones y los grafos dirigidos. Estos son muy útiles en distintas áreas de aplicación, por lo cual resulta importante su dominio en la informática.

Producto cartesiano o conjunto producto

Se denomina producto cartesiano o conjunto producto A x B de dos conjuntos no vacíos A y B, al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) en donde a $\in$ A y b $\in$ B. Formalmente, se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}}$$

También se define el par ordenado (a, b) como el listado de los elementos a y b en un orden establecido, esto es, en el primer término aparece a y en el segundo término aparece b. A partir de esta definición, podemos indicar que un par ordenado es una secuencia de longitud 2. Además, se verifica la igualdad de dos pares ordenados (a_1, b_1) y (a_2, b_2) cuando se cumple que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. También se cumple que el cardinal de los conjuntos A y B corresponde al tamaño de un producto cartesiano A × B, esto es, A x B = |A| x |B|.

Ejemplo

Encuentre el producto cartesiano de los conjuntos A = {1, 2} y B = {3, 4, 5}.

Solución

A x B = {1, 2} × {3, 4, 5}

A x B = {(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)}

Relaciones y dígrafos

Relaciones

Una **relación R** de **A** a **B**, donde ambos conjuntos no están vacíos, es un subconjunto de A x B. De esta forma, a **está relacionado con** b **por** R (aRb) si R $\subseteq$ A x B y (a, b) $\in$ R, lo contrario será que a no está relacionado con b por R ($a \not R b$).

Tendremos una relación sobre A, R $\subseteq$ A x A, (no se denomina una relación de A a A) cuando A y B son iguales.

Ejemplo

Defina la relación aRb de los conjuntos A = {c, d, e} y B = {m, n}

Solución

R = {(c, m), (c, n), (d, m), (d, n), (e, m), (e, n)}

Ejemplo

Defina la relación aRb de a < b en A = {1, 2, 3, 4, 5}.

Solución

R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)}

Conjuntos que surgen de las Relaciones

Dominio y Rango de la Relación

El conjunto de elementos de A que están relacionados con algún elemento de B se le denomina **dominio de R** y está denotado por **Dom(R)**. En esta definición el subconjunto de A en el dominio, es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares que forman R.

Por otro lado, el conjunto de elementos de B que están relacionados con algún elemento de A se le denomina el **rango de R** y es designado por **Ran(R)**.

Ejemplo

Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c, d} que tienen una relación R de A a B igual a R = {(2, c), (1, d), (3, d), (2, a)}. Encuentre el dominio y el rango de R.

Solución

Dom(R) = {1, 2, 3}

Ran(R) = {a, c, d}

Relación inversa

La relación que asocia a los elementos de B con los de A de los conjuntos A, B y con una relación R ⊆ A x B se denomina relación inversa de R, y se representa por R^{-1}. Formalmente se define como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in A \times B \mid (a, b) \in R\}$$

Matriz de una relación

Se utiliza para representar una relación R de X a Y, se etiquetan las filas con elementos de X y las columnas se etiquetan con los elementos de Y. Se representa R por la matriz m x n, $M_R = [m_{ij}]$, la cual se define por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; (x_i, y_j) \in R \\ 0 \; si \; (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

Ejemplo

Escriba la matriz de relación M_R, de R = {(1, b), (1, d), (2, c), (3, c), (3, b), (4, a)} y los conjuntos X = {1, 2, 3, 4} y Y = {a, b, c, d}.

Solución

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dígrafos

Los dígrafos nos permiten expresar gráficamente las relaciones. Una relación de A en B se representa dibujando un círculo para cada elemento tanto de A como de B a los cuales se les denomina **nodos**. Estos nodos estarán conectados entre sí mediante líneas rectas denominadas **arcos** si el par $x \in A$, $y \in B$ está en la relación. Los arcos tienen una dirección que está indicada mediante una flecha a estos se les denominan **arcos dirigidos**. La dirección del arco empieza en el primer elemento del par y termina en el segundo elemento del par. Al grafo resultante se le denomina **grafo dirigido** o **dígrafo**.

Formalmente se define un grafo dirigido o dígrafo como un par ordenado D = (A, R), donde:

- A es un conjunto finito denominado conjunto de nodos de D
- R es una relación binaria definida sobre A y cuyos elementos de R se le denominan arcos de D.

Ejemplo

Dibuje el grafo dirigido de la relación R = {(a, 1), (a, 3), (b, 2), (b, 3)}.

Solución

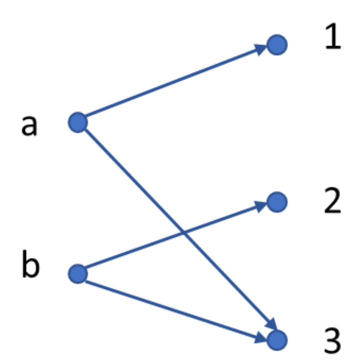


Figura 5. Grafo dirigido de la relación R = {(a, 1), (a, 3), (b, 2), (b, 3)}. Elaboración propia.

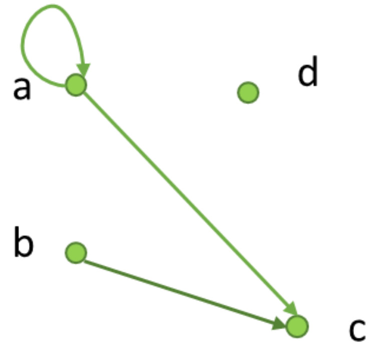
Otras definiciones importantes relacionadas con los dígrafos son:

- ❖ El grado interno o grado de entrada (gre) de un nodo: es el número de aristas que terminan en ese nodo.

- El grado externo o grado de salida (grs) de un nodo: es el número de aristas que salen de ese nodo.
- El grado de un nodo (gr): es la suma de sus grados internos y externos, esto es, gr(v) = gre + grs.

Ejemplo

Dado el grafo dirigido D = (A, R) que se muestra en la figura



con el conjunto A = {a, b, c, d} y R = {(a, a), (a, c), (b, c)}. Encuentre:

a. los grados de entrada de cada nodo
b. los grados de salida de cada nodo
c. los grados de cada nodo

Solución

a. Los grados de entrada son:
   $gr_e(a) = 1$
   $gr_e(b) = 0$
   $gr_e(c) = 2$
   $gr_e(d) = 0$

b. Los grados de salida son:
   $gr_s(a) = 2$
   $gr_s(b) = 1$
   $gr_s(c) = 0$
   $gr_s(d) = 0$

c. Los grados de cada nodo son:
   gr(a) = 1 + 2 = 3
   gr(b) = 0 + 1 = 1
   gr(c) = 2 + 0 = 2
   gr(d) = 0 + 0 = 0

Trayectoria en relaciones y dígrafos

Una secuencia finita π**: a, x_1, x_2, …, x_{n-1}**, **b** que comienza con a y termina con b, tal que

$$a \; R \; x_1, \; x_1 \; R \; x_2, \; \ldots, \; x_{n-1} \; R \; b.$$

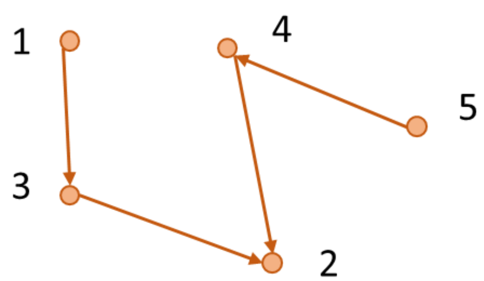
es una **trayectoria de longitud n** en una relación R sobre un conjunto A de **a** a **b**.

Una trayectoria de longitud **n** involucra **n+1** elementos de A.

Con la ayuda del dígrafo de la relación se puede observar visualmente con más facilidad una trayectoria. La longitud de una trayectoria es el número de arcos que la misma posee. Se llama ciclo a una trayectoria que comienza y termina en el mismo vértice.

Ejemplo

Encuentre la trayectoria de longitud 2 para el siguiente dígrafo con la relación R = {(1, 3), (3, 2), (4, 2), (5, 4)} en el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}.



Solución

Las trayectorias de longitud 2 son:

π: 1, 3, 2

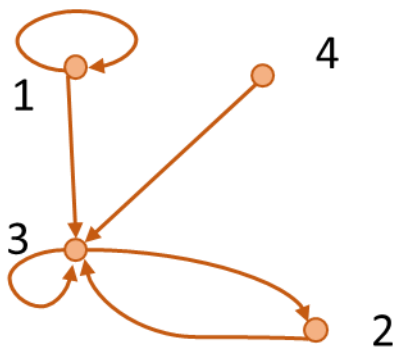
π: 5, 4, 2

Cuando hay una **trayectoria de longitud n de x a y en R**, se define una relación $\mathbf{R^n}$ sobre A como **x $\mathbf{R^n}$ y**.

Existe una relación de conectividad para R, R^∞ sobre A, cuando hay alguna trayectoria en R de x a y la cual se denota como **x $\mathbf{R^\infty}$ y**. El conjunto de esta relación de conectividad R^∞ está formado por todos los vértices que puede alcanzarse desde x por alguna trayectoria de R.

Ejemplo

Utilizando el siguiente grafo



calcular:

a. R^2
b. R^∞

Solución

a. R^2
   1 R^2 1 puesto que 1 R 1 y 1 R 1
   1 R^2 2 puesto que 1 R 3 y 3 R 2
   2 R^2 2 puesto que 2 R 3 y 3 R 2

   R^2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 2)}

b. R^∞ = {(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 2), (4, 3), (4, 2)}

En esta relación de conectividad se verifican todos los pares ordenados de vértices para los cuales haya una trayectoria de cualquier longitud del primer vértice al segundo.

Propiedades de las relaciones

Para las siguientes propiedades la relación R está definida sobre un conjunto A.

Propiedad reflexiva:

También conocida como idéntica. Si para todo x ∈ A entonces (x, x) ∈ R y es reflexiva. En resumen, el elemento está relacionado consigo mismo ∀ x ∈ A se cumple que (x, x) ∈ R.

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es reflexiva.

Solución

La relación R es reflexiva, se verifica que cada elemento x ∈ X, (x, x) ∈ R.

Propiedad antirreflexiva:

También conocida como irreflexiva. Si para todo x ∈ A se cumple que x no está relacionado consigo mismo, es decir que (x, x) ∉ R entonces la relación es antirreflexiva.

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,2), (2,1), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es antirreflexiva.

Solución

La relación R es antirreflexiva, se verifica que cada elemento x ∈ X, (x, x) ∉ R.

Propiedad simétrica:

Una relación R es simétrica si para todo x, y ∈ A existe (x, y), (y, x) ambos pares pertenecientes a R. En resumen, ∀ x, y ∈ A se cumple que si (x, y) ∈ R entonces (y, x) ∈ R.

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2), (4,4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es simétrica

Solución

Se verifica que cada par (x, y) y (y, x) exista en la relación

(1,3), (3,1)

(2,4), (4,2)

esta condición se cumple en los pares anteriores.

En los siguientes pares se encuentran implícitos

(1,1), (2,2), (4,4)

Por lo tanto, la relación es simétrica

En una relación simétrica el grafo posee arcos dirigidos en ambas direcciones, es decir, de v a w y de w a v. De esta forma el grafo cumple con esta propiedad. Esto se muestra en el siguiente grafo correspondiente a la relación R = {(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2), (4,4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} del ejemplo anterior.

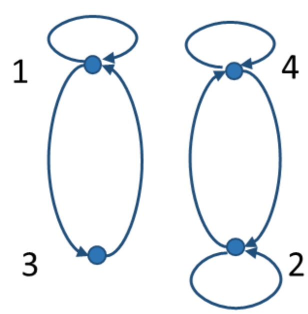


Figura 6. Grafo dirigido de la relación simétrica R = {(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2), (4,4)}. Elaboración propia.

Propiedad antisimétrica:

Una relación R es antisimétrica si para todo x, y ∈ X se cumple en R alguna de las siguientes condiciones:

- si (x, y) ∈ R y (y, x) ∉ R o (y, x) ∈ R y (x, y) ∉ R entonces x ≠ y
- si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R entonces x = y

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}, sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es antisimétrica.

Solución

Se verifica que si existe el par (x, y) en R no exista el par (y, x) en R para x ≠ y

(1,2) ∈ R pero (2, 1) ∉ R

(1,3) ∈ R pero (3, 1) ∉ R

(1,4) ∈ R pero (4, 1) ∉ R

(2,3) ∈ R pero (3, 2) ∉ R

(2,4) ∈ R pero (4, 2) ∉ R

(3,4) ∈ R pero (4, 3) ∉ R

Se verifica que existe el par (x, y) en R para x = y

{(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

Entonces la relación R es antisimétrica.

Propiedad asimétrica:

Una relación R es asimétrica si para todo x, y ∈ X, si (x, y) ∈ R entonces (y, x) ∉ R.

Por definición los pares (n, n) no pueden estar en esta propiedad. También se verifica que las relaciones asimétricas son antirreflexivas.

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es asimétrica.

Solución

Se verifica que si existe el par (x, y) en R no exista el par (y, x) en R

(1,2) $\in$ R pero (2, 1) $\notin$ R

(1,3) $\in$ R pero (3, 1) $\notin$ R

(1,4) $\in$ R pero (4, 1) $\notin$ R

(2,3) $\in$ R pero (3, 2) $\notin$ R

(2,4) $\in$ R pero (4, 2) $\notin$ R

(3,4) $\in$ R pero (4, 3) $\notin$ R

Entonces la relación R es asimétrica.

Propiedad transitiva:

Una relación R es transitiva si se cumple que, para todo x, y, z $\in$ A, si (x, y), (y, z) $\in$ R entonces (x, z) $\in$ R.

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)}, sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es transitiva.

Solución

Se verifica que si existe (x, y) y (y, z) en R exista (x, z) en R

(x, y)	(y, z)	(x, z)
(1, 2)	(2, 3)	(1, 3)
(1, 2)	(2, 4)	(1, 4)

(1, 3) (3, 4) (1, 4)

(2, 3) (3, 4) (2, 4)

Entonces la relación R es transitiva.

Relaciones de equivalencia

Sea R una relación sobre un conjunto A, si R es una relación reflexiva, simétrica y transitiva entonces es una relación de equivalencia.

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,4), (1,4), (3,1), (4,3), (4,1)} sobre A = {1, 2, 3, 4} es una relación de equivalencia

Solución

1. Se verifica que la relación R es reflexiva porque (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) ∊ R.
2. Se verifica que la relación R es simétrica porque (1, 3) ∊ R y (3, 1) ∊ R, (3, 4) ∊ R y (4, 3) ∊ R, (1, 4) ∊ R y (4, 1) ∊ R.
3. Se verifica que la relación R es transitiva porque (1, 3), (3, 4) y (1, 4) ∊ R, (3, 1), (1, 3) y (3, 3) ∊ R, (1, 4), (4, 3) y (1, 3) ∊ R, (4, 1), (1, 4) y (4, 4) ∊ R.

Como la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva entonces R es una relación de equivalencia.

Clases de equivalencia

Se definen las clases de equivalencia a partir de relación de equivalencia R sobre un conjunto A.

El conjunto de todos los elementos x que están relacionados con un elemento “a” del conjunto A, al cual denotamos como [a], se le denomina **clase de equivalencia**. Formalmente se define como **[a] = {x ∈ A | x R a}**.

Ejemplo

Dada la relación de equivalencia R = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 4)} sobre X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Encuentre las siguientes clases de equivalencia:

a. [1]
b. [2]
c. [3]
d. [4]

Solución

Para encontrar las clases de equivalencia debemos considerar la definición [a] = {x ∈ A | x R a}, entonces para el primer caso tendremos que la clase de equivalencia de [1] que contiene a 1 consiste en todas las x tales que (x, 1) ∈ R y de manera similar los demás casos.

a. [1] = {1, 3, 5}
b. [2] = [6] = {2, 6}
c. [3] = [5] = {1, 3, 5}
d. [4] = {4}

Funciones

Definición de función

Dados dos conjuntos finitos A y B al conjunto de pares ordenados en donde a cada miembro de un conjunto A se le asigna exactamente un miembro de un conjunto B se le denomina **función**.

Formalmente, se define una ***función*** f de A a B como un subconjunto del producto cartesiano A x B que tiene la propiedad de que ***para cada a*** $\in$ ***A***, existe exactamente una b $\in$ B tal que (a, b) $\in$ f. En ocasiones denotamos una función f de A a B como f: A $\rightarrow$ B.

Ejemplo

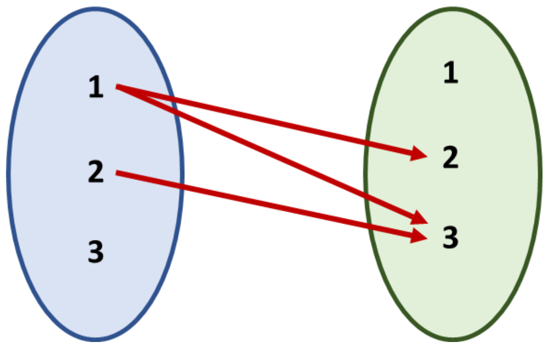
Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {1, 2, 3}, indique si las siguientes relaciones son funciones o no.

a. R1 = {(1, 2), (2, 3), (1, 3)}
b. R2 = {(1, 2), (2, 3), (3, 3)}

Solución

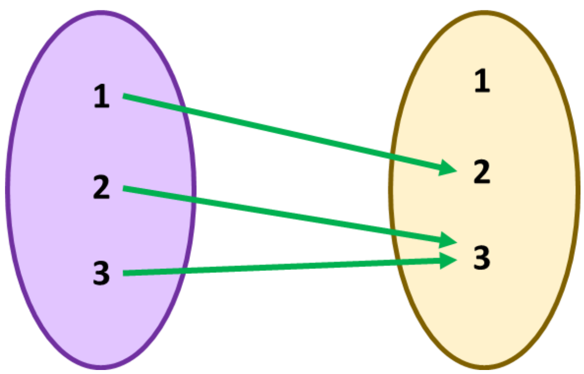
Verificamos cada relación con la definición y nos apoyaremos del diagrama de flechas para ver la relación con mayor claridad.

a. Se verifica que el elemento 3 $\in$ A no se encuentra en la relación R1 = {(1, 2), (2, 3), (1, 3)}. Esto se puede observar mejor en el diagrama de flechas donde no existe una flecha que salga del elemento 3.



Por lo tanto, R1 = {(1, 2), (2, 3), (1, 3)} no es una función.

b. Se verifica que todos los elementos del conjunto A se encuentran en la relación R2 = {(1, 2), (2, 3), (3, 3)}, esto se puede observar mejor en el diagrama de flechas.



Por lo tanto, R2 = {(1, 2), (2, 3), (3, 3)} si es una función.

Se denomina ***dominio, Dom,*** de *ƒ al* conjunto A y al ***rango, codominio o imagen*** de *ƒ*, ***Ran***, al conjunto de todas las imágenes *ƒ* (a) de los elementos del conjunto A como se muestra en el siguiente diagrama de flechas.

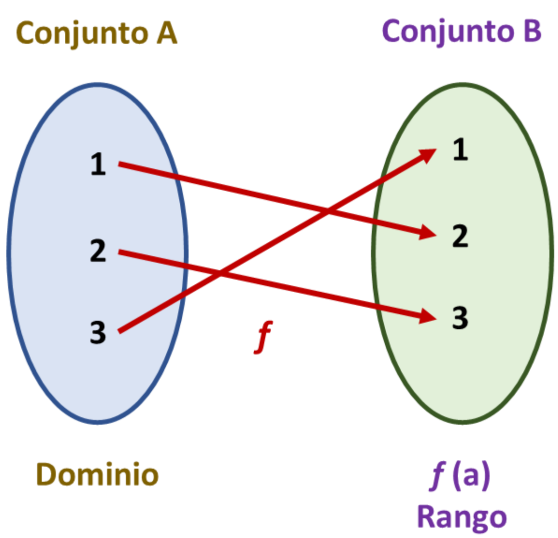


Figura 7. Definición de dominio y rango. Elaboración propia.

Ejemplo

Dada la siguiente función f = {(1, a), (2, b), (3, a)} escriba el conjunto correspondiente al dominio y al rango.

Solución

Dom = {1, 2, 3}

Ran = {a, b, c}

Tipos de funciones especiales

Función inyectiva

La función inyectiva, también denominada de uno a uno, es aquella en donde cada elemento del codominio o rango tiene un único elemento del dominio. En esta función dos pares no van a tener el mismo segundo elemento.

Ejemplo

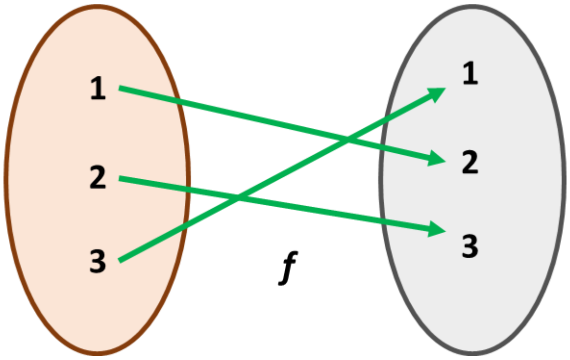
Indique si la siguiente función es inyectiva con Dom = {1, 2, 3}, Codominio = {1, 2, 3}

f = {(1, 2), (2, 3), (3, 1)}

Solución

Verificamos la función con la definición y nos apoyaremos del diagrama de flechas para ver la función con mayor claridad.

Como los pares no tienen el mismo segundo elemento se concluye que la función es inyectiva. Esto se puede observar mejor en el diagrama de flechas.



Función suprayectiva

Si cada elemento del codominio aparece en algún par ordenado entonces la función es suprayectiva. A esta función también se le conoce como sobreyectiva. De forma resumida en este tipo de función, no sobran elementos en el codominio

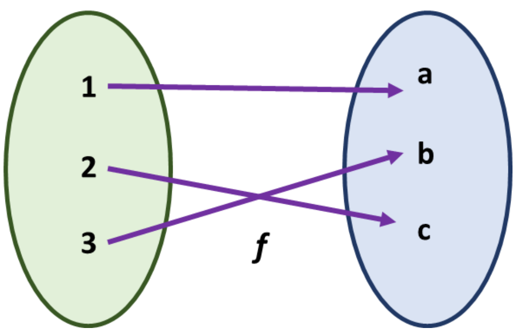
Ejemplo

Indique si la siguiente función es suprayectiva con Dom = {1, 2, 3}, Codominio = {a, b, c}

f = {(1, a), (2, c), (3, b)}

Solución

Como no sobran elementos en el codominio se concluye que la función es suprayectiva. Esto se puede observar mejor en el diagrama de flechas.



Función invertida

Una función invertida es uno a uno y sobreyectiva de Y a X, {(y, x) | (x, y) $\in$ *f*}. Recordemos que f es una función uno a uno, sobre de X a Y. A este tipo de función se le denotada como f^{-1}.

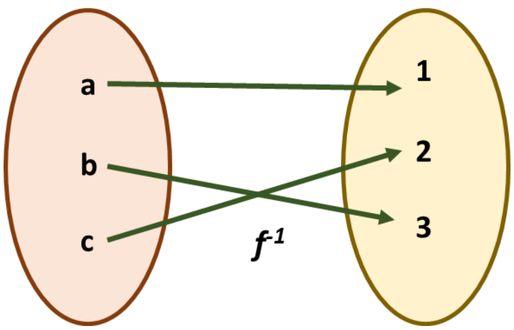
Ejemplo

Escriba la función invertida para la función f = {(1, a), (2, c), (3, b)} con Dom = {1, 2, 3}, Codominio = {a, b, c}.

Solución

f -1 = {(a, 1), (c, 2), (b, 3)}

Esta se muestra en el siguiente diagrama de flechas.



Funciones idénticas

Se dice que dos funciones, *f*: A $\rightarrow$ B y g: C $\rightarrow$ D, son idénticas cuando cumplen lo siguiente:

1. tienen el mismo dominio, A = C
2. tienen el mismo codominio, B = D
3. asignan la misma imagen a cada elemento del dominio, esto es, para cada x $\in$ A y x $\in$ B se tiene que *f(x) = g(x)*.

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, donde g una función de X a Y y f una función de Y a Z, la función ($f \circ$ g) (x) = f (g(x)) de X a Z es la composición de f con g. A esta composición se le denota como $f \circ g$.

Ejemplo

Escriba la composición $f \circ g$ de X a Z de las funciones

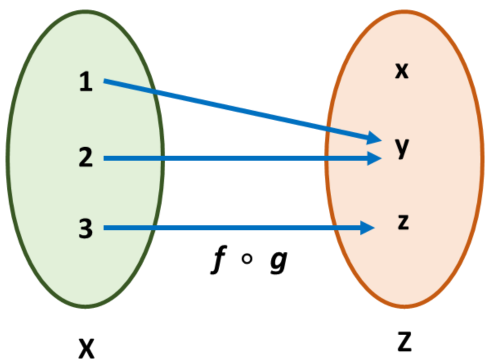
g = {(1, a), (2, a), (3, c)} una función de X = {1, 2, 3} a Y = {a, b, c} y

f = {(a, y), (b, x), (c, z)}, una función de Y a Z = {x, y, z}

Solución

$f \circ g$ = {(1, y), (2, y), (3, z)}

Esta se muestra en el siguiente diagrama de flechas.



Este resultado se obtiene de las composiciones de las siguientes funciones

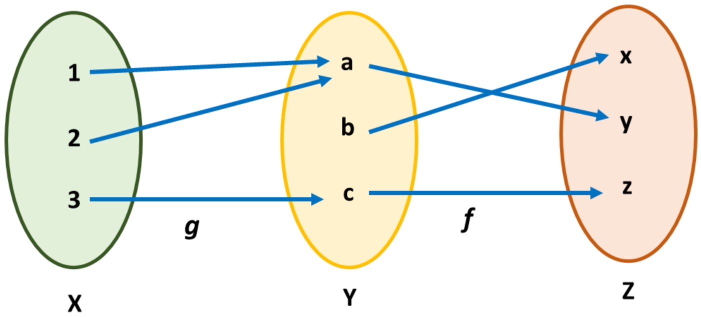


Figura 8. Composición de Funciones. Paso a paso. Elaboración propia.

Capítulo III: Semigrupos, Grupos y Codificación de Información Binaria

Semigrupos y Grupos

Operaciones binarias sobre un conjunto

Definiciones

A la regla que asigna a cada pareja ordenada de elementos de un conjunto A un único elemento del mismo conjunto A se le denomina operación binaria. A estas operaciones binarias se le denota por el símbolo *, por otro lado, al elemento asignado se le denota como a*b, en donde a y b son elementos de A y a*b $\in$ A.

Ejemplo

Se define la operación binaria a*b como máx{a, b} sobre el conjunto de números enteros. Escriba las siguientes operaciones binarias:

a. 2*4
b. -3*(-5)

Solución

a. 2*4 = máx{2, 4} = 4
   2*4 = 4

b. -3*(-5) = máx{-3,-5} = -3
   -3*(-5) = -3

Propiedades de las operaciones binarias

En esta sección se explican las propiedades de las operaciones binarias. Primero se define cada una de ellas y luego se muestra un ejemplo.

Propiedad conmutativa

Si a*b = b*a para todos los elementos a y b en el conjunto A, entonces la operación binaria * sobre el conjunto A es **conmutativa**.

Ejemplo

Compruebe si la operación binaria a*b definida como a+b con a = 5 y b = 2 es conmutativa.

Solución

Verificamos que se cumpla la definición a*b = b*a que para nuestro ejemplo es

a+b = b+a

a+b = 5+2
a+b = 7

b+a = 2+5
b+a = 7

Por lo tanto, se cumple que a+b = b+a y la operación binaria 2 es conmutativa.

Propiedad asociativa

Si a*(b*c) = (a*b)*c para todos los elementos a, b y c en el conjunto A, entonces la operación binaria * sobre un conjunto A es asociativa.

Ejemplo

Compruebe si la operación binaria a*b definida como 2a+(b+c) con a=3, b=4 y c=1 es asociativa.

Solución

Verificamos que se cumpla la definición a*(b*c) = (a*b)*c que para nuestro ejemplo es 2a+(b+c)

2a+(b+c) = 2·3 + (4+1)
2a+(b+c) = 11

$(2a+b)+c = (2 \cdot 3 + 4) + 1$
$(2a+b)+c = 11$

Por lo tanto, se cumple que a*(b*c) = (a*b)*c y la operación binaria 2 es asociativa.

Semigrupos

Definiciones

A la operación binaria asociativa * definida en un conjunto no vacío S se le denomina semigrupo y se denota como (S, *).

Al semigrupo en donde la operación es conmutativa se le denomina semigrupo conmutativo, también conocido como abeliano.

Por otro lado, al semigrupo M = (M, $*$) con una operación binaria con el elemento unidad, también llamado elemento unidad para la multiplicación y elemento neutro para la adición, se le denomina monoide. Cuando la operación es conmutativa al monoide se le denomina monoide conmutativo o abeliano.

Teoremas de los semigrupos

Una forma de verificar si una operación binaria definida sobre un conjunto pertenece a un semigrupo es verificando que cumpla con estos dos teoremas:

Teorema 1:

Si (S, *) es un semigrupo y xi $\in$ S, entonces $x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n$ es un miembro único de S $\forall$ n $\in$ N.

Teorema 2:

Si (S, *) es un semigrupo conmutativo, entonces $(x*y)n = x^n * y^n \quad \forall x \in S$ y $\forall n \in N$.

Ejemplo

Verifique si (S, *) es un semigrupo con la operación binaria a*b de máximo de a, b, para todo a, b y c que pertenecen al conjunto los números reales R.

Solución

Verificando la definición de semigrupo tenemos que:

1. la operación binaria a*b de máximo de a, b, para todo a, b y c es asociativa porque Máx {máx {a,b}, c} = Máx {a, máx {b,c}}
2. $\forall$ a, b, c $\in$ R

Por lo tanto, (R, *) es semigrupo

Productos y Cocientes de los semigrupos

Productos de los semigrupos

Se define el producto de X y Y, dos subconjuntos del semigrupo S, por XY = {xy | x $\in$ X, y $\in$ Y}

Cocientes de los semigrupos

Para comprender mejor la definición de cociente de semigrupos se define la relación de equivalencia estable de un semigrupo como:

Dado un semigrupo S y una relación de equivalencia sobre S, $\equiv$. *S*i se verifica que para todo *a; a'; b; b'* $\in$ *S* tales que *a* ≡ *a'* y *b* ≡ *b'*, se tiene *a:b* ≡ *a':b'* entonces se dice que la relación ≡ es estable con la operación *: en* (*S; :*)

Teorema

Sea (S; :) un semigrupo y ≡ una relación de equivalencia estable con la operación :. Entonces, (S= ≡; :) es un semigrupo llamado semigrupo cociente de (S; :) sobre ≡.

Grupos

Los grupos son un tipo particular de monoide los cuales se aplican en aquellas áreas en donde aparece una simetría tales como la física, química y las matemáticas, entre otras. En esta sección se define y explica la teoría de grupos.

Definiciones

Se define un grupo [G, •], si G es un conjunto no vacío y la operación binaria • sobre G cumple con las siguientes condiciones:

1) la operación binaria • es asociativa
2) existe, en G, un elemento identidad
3) cada elemento perteneciente a G tiene inverso, con respecto a la operación binaria • en G

Cuando la operación binaria • en el grupo G es conmutativa se le denomina grupo conmutativo.

Teoremas de los grupos

Las definiciones anteriores se resumen en los siguientes teoremas:

Teorema 1:

Si (G, *) es un Grupo y a, b, x $\in$ G, entonces ax = b, si sólo si, x = a–1 b y xa = b, si y sólo si x = ba–1

Teorema 2:

(G, *) es un Grupo y a, b, c $\in$ G, si ab = ac o ba = ca, entonces b = c. Llamada Ley de Cancelación.

Teorema 3:

(G, *) es un Grupo finito y a $\in$ G, entonces an = 1 para algún n $\in$ G.

Ejemplo

Verifique si (R+, •) es un grupo, donde R+ es el conjunto de los números reales positivos y • es la operación de multiplicación sobre los reales positivos.

Solución

Verificando la definición de grupo tenemos que:

- La multiplicación es una operación asociativa y conmutativa, por lo que se cumple con la primera condición
- En el conjunto R+, el número real positivo 1 sirve de identidad x • 1 = 1 • x = x, por lo que se cumple con la segunda condición
- En el conjunto R+, todo x en R+ tiene inverso $\frac{1}{x}$ en el conjunto R+, porque $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ y de esta forma se cumple con la tercera condición

Por lo tanto, (R+, •) es un grupo conmutativo.

Productos y Cocientes de los grupos

Producto de los grupos

Dados dos grupos H y K se define el producto como el conjunto

H x K = {(h, k) | h $\in$ H, k $\in$ K}

dotado de la operación

$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2)$

Cociente de los grupos

Antes de definir el cociente de los grupos debemos revisar la definición de los subgrupos normales.

Subgrupo normal

Dado un subgrupo H de un grupo G, se dice que H es normal en G si gH = Hg para todo g $\in$ G. En otras palabras, cuando coinciden las clases laterales izquierdas y derechas.

Grupo cociente

Se denomina grupo cociente de G por N al grupo de las clases laterales del subgrupo normal N de un grupo G que forman un grupo G/N con la operación (aN)(bN) = abN.

Codificación de Información Binaria y Detección de errores

La correcta codificación de la información es muy importante en la transmisión de la información, es por ello que vamos a dedicar la siguiente sección al estudio de los temas relacionados con la codificación de información binaria, decodificación, detección y corrección de errores.

Codificación de información binaria y detección de errores

Para transmitir la información es necesario codificarla. La forma más usual es utilizar la información binaria, por medio de la cual se envían los mensajes o cadenas de palabras.

Durante la transmisión o el almacenamiento los datos pueden corromperse debido a distintos fenómenos no deseados, algunos de ellos pueden ser subidas de tensión, ruido eléctrico, puntos defectuosos en los discos o cintas, entre otros. Es por esta razón que es muy útil poder detectar y hasta corregir los errores en los datos.

Podemos encontrar distintas formas de errores tales como la eliminación de un bit o la adición de un bit, la inversión de un bit de 0 a 1 o viceversa. También, se pueden afectar varios bits sucesivos, a lo que se le llama errores de ráfaga.

Existen dos estrategias para tratar los errores:

Códigos detectores de error: en esta estrategia se incluye una cantidad de bits redundantes en los datos que se transmiten. De esta forma, el receptor puede detectar que se ha producido un error y solicitar la retransmisión del mensaje.

Podemos detectar errores utilizando un código de paridad simple, sin embargo debemos tener en cuenta que este sólo puede detectar errores de números impares.

Códigos correctores de error: al igual que en la estrategia anterior, se incluye información redundante de forma tal que le permita receptor deducir cual fue el carácter que se transmitió. De esta forma, el receptor puede corregir un número limitado de errores.

Antes de explicar la forma en la que pueden manejarse los errores veamos cómo se codifican los datos debido a que una palabra de datos de longitud m bits es transformada en palabras codificadas de n bits antes de transmitirse. Empecemos por definir una unidad de datos, que en este contexto se le denomina trama. La trama consiste en m bits de datos y r bits redundantes los cuales son usados para la verificación. La longitud total de una trama n es igual a n = m + r. Se conoce como *palabra codificada* a la unidad de n bits que contiene datos y bits de redundancia.

Un concepto muy importante es la distancia Hamming la cual se define a continuación.

Distancia Hamming

Definimos la distancia Hamming entre dos palabras codificadas de n bits v1 y v2, como el número de bits en el que difieren v1 y v2. La distancia Hamming se denota como d(v1, v2).

Ejemplo

Encuentre la distancia Hamming de las palabras codificadas de n bits v1 = 10001001 y v2 = 10110001

Solución

Verificando el número de bits en el que difieren v1 y v2 tenemos

v1 = 10001001

v2 = 10110001

Por lo tanto, d(v1, v2) = 3

Distancia Hamming mínima

A la distancia Hamming más pequeña entre todos los posibles pares de palabras codificadas de un esquema de codificación se le denomina distancia Hamming mínima y se denota como dmin. El valor corresponde a la distancia Hamming más pequeña entre todas las encontradas en las palabras codificadas del esquema.

En la detección de errores se utiliza la codificación en bloques. En la codificación en bloques la misma palabra de datos es transformada siempre en la misma palabra codificada. A este proceso de codificación en bloques se le denomina de uno a uno. Se denominan palabras válidas a las palabras codificadas a partir de una palabra de datos. Se tendrá $2^n - 2^m$ palabras codificadas que no serán utilizadas, a estas se les denomina inválidas.

En este enfoque a partir de palabras de datos el emisor crea las palabras codificadas para ello se utiliza un generador el cual se encarga de aplicar las reglas y procedimientos de codificación específicos de acuerdo con el esquema empleado.

Debemos estar claros que cada palabra codificada puede variar durante su transmisión. Si al recibirla el receptor, la misma no es válida, entonces será descartada. Por el contrario, si al ser modificada resulta codificada como válida, entonces el error no será detectado.

En la siguiente sección veremos cómo decodificar la palabra y corregir los errores.

Decodificación y corrección de errores

En la sección anterior se mencionaron dos métodos de detección de errores. En este apartado se desarrollarán los métodos de corrección de errores.

Existen dos formas en las que se pueden tratar la corrección de errores:

- Cuando en un fragmento de datos se detecta el error entonces el receptor solicita la retransmisión al emisor de dicho fragmento de datos.
- Cuando se está utilizando suficiente información redundante que le permite al receptor detectar el error y aplicar el método corrector para corregir dicho error.

Basados en la explicación de la codificación en bloques de la sección anterior podemos indicar que, para detectar un error en la palabra codificada, el receptor sólo necesita saber si la misma es inválida. Luego de recibir una palabra inválida se realiza el cálculo de la distancia Hamming entre la palabra recibida y las palabras válidas para encontrar la distancia menor la cual nos indicará la palabra codificada válida que originalmente transmitió el emisor.

El error no podrá ser corregido y la palabra recibida se descartará si al realizar el cálculo de la distancia Hamming mínima, dos o más palabras válidas tienen un mismo valor.

Propiedades de la distancia de Hamming:

- d(a, b) = d(b, a)
- d(a, b) = 0 si y sólo si a = b
- d(a, b) + d(b, c) ≥ d(a, c)

donde, *d* es el número de bits *p* que son diferentes entre el mensaje emitido y el recibido.

Con esta información tenemos que

- Se puede detectar un error de peso p, si d ≥ p + 1
- Se puede corregir p dígitos, si d ≥ 2p + 1

Ejemplo

Calcule la distancia miníma de Hamming d si queremos

a. detectar 4 errores
b. corregir 4 errores

Solución

a. para detectar 4 errores, p = 4
   d = p + 1
   d = 4 + 1
   d = 5

la distancia mínima de Hamming debe ser de 5

b. corregir 4 errores, p = 4
   d = 2p + 1
   d = 2 (4) + 1
   d = 9

la distancia mínima de Hamming debe ser de 9

Bibliografía

1. García, F. (2015). Matemática discreta. Ediciones Paraninfo, S. A.

2. Villalpando, J., García, A. (2014). Matemática discreta. Aplicaciones y ejercicios. Grupo Editorial Patria.

3. Espinosa Armenta, Ramón. (2010). Matemáticas Discretas. Alfaomega Grupo Editor.

4. Lipschutz, S. (2009). Matemáticas Discretas. McGraw-Hill.

5. Jiménez Murillo, José A. (2008). Matemáticas para la Computación. Alfaomega Grupo Editor.

6. Veerarajan, T. (2008). Matemáticas Discretas con Teoría de Gráficas y Combinatoria. McGraw-Hill Interamericana.

7. Alberto, M. Schwer, I., Cámara, V. Fumero, Y. (2005). Matemática discreta. Con aplicaciones a las Ciencias de la Porgramación y de la Computación. Ediciones UNL.

8. Johnsonbaugh, R. (2005). Matemáticas discretas. Pearson Educación.

9. Rosen, K. (2004). Matemática discreta y sus aplicaciones. McGraw-Hill.

10. Kolman, B., Busby, R. C., & Ross, S. (1997). Estructuras de matemáticas discretas para la computación. Pearson Educación.

11. Verde, L. (1996). Matemática discreta y combinatoria. Editorial Anthropos.

Anexos 1: Pruebas rápidas

Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Estructuras Discretas para la Computación

Prueba #1

Nombre: ______________________ Cédula: ________________ Grupo: _______

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: ______/

1. Defina el conjunto A con los elementos d, e, g, h por
   a. Enumeración
   b. Diagrama de Venn
2. Defina por comprensión
   a. el conjunto M correspondientes a los meses del año
   b. el conjunto P correspondientes a las provincias del país
3. Indique si B es un subconjunto de A en los siguientes casos:
   a. A = {8, 2, 4, 10, 25}, B = {10, 25, 8}
   b. A = {f, g, m, n, p}, B = {c, d, e, f}

Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Estructuras Discretas para la Computación

Prueba #2

Nombre: ________________________ Cédula: _________________ Grupo: _______

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: ______/

1. Encuentre la cardinalidad de los siguientes conjuntos
    a. A = {o, p, q, r, s, t}
    b. B = {{c, d}, {e, g}, {h, j, o}}
2. Encuentre el conjunto potencia P(A) del conjunto A = {m, n, o, p}
3. Realice la unión de los conjuntos A= {o, p, q, r} y B = {m, n, o, p}
4. Realice la intersección de los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y B = {3, 4, 10, 12, 25}

Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Estructuras Discretas para la Computación

Prueba #3

Nombre: _______________________ Cédula: ________________ Grupo: _______

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: ______/

1. Compruebe que los conjuntos A = {b, c, d, e} y B = {h, j, k} son disjuntos.

2. Encuentre el complemento relativo, A – B, de A = {m, n, r, s, w} y B = {r, w, x, z}

3. Encuentre la diferencia simétrica, A ∆ B, de A = {g, h, k, m} y B = {e, f, g, r, s, t}

4. Utilizando el principio de adición, encuentre la cantidad de elementos de |A ∪ B| para los siguientes casos:

    a. A = {m, n, o, p}, B = {p, q, r, s}

    b. A = {1, 2, 3, 4, 6}, B = {3, 4, 5, 9}, C = {1, 3, 4, 7, 8}

Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Estructuras Discretas para la Computación

Prueba #4

Nombre: ______________________ Cédula: ________________ Grupo: _______

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: ______/

1. Escriba los términos y su posición de la siguiente sucesión $\{a_n\}$ = 1, 3, 5, 7, 9,…
2. Calcular los 5 primeros términos de la sucesión recurrente con dados los primeros dos términos $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y el término general an = $a_{n-1} – a_{n-2}$
3. Escriba el conjunto correspondiente a los elementos de la sucesión de los números pares
4. ¿Cuántas formas diferentes hay de colocar a las letras A, B, C, D en cuatro posiciones?
5. ¿Cuántas formas existen de escoger un grupo de 4 personas de un grupo de 10 personas?

Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Estructuras Discretas para la Computación

Prueba #5

Nombre: _______________________ Cédula: ________________ Grupo: _______

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: ______/

1. Encuentre el producto cartesiano de los conjuntos
2. Defina la relación aRb de los conjuntos A = {1, 3, 5} y B = {c, d}
3. Defina la relación aRb de a < b en A = {3, 5, 7, 9}
4. Dados los conjuntos A = {2, 3, 5} y B = {c, d} que tienen una relación R de A a B igual a R = {(2, c), (5, c), (3, d)}. Encuentre el dominio y el rango de R.
5. Escriba la matriz de relación MR, de R = {(a, 5), (b, 3), (b, 6), (c, 5)} y los conjuntos X = {a, b, c} y Y = {3, 5, 6}.

Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Estructuras Discretas para la Computación

Prueba #6

Nombre: _______________________ Cédula: ________________ Grupo: _______

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: ______/

1. Dibuje el grafo dirigido de la relación R = {(1, a), (1, c), (2, b), (2, c)}.

2. Dado el grafo dirigido D = (A, R) que se muestra en la figura

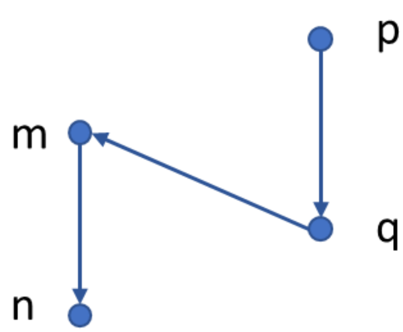
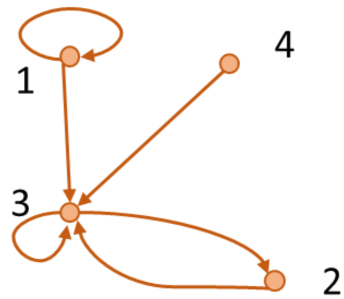


Figura 9. Dígrafo D = (A, R).

con el conjunto A = {m, n, p, q} y R = {(m, n), (p, q), (q, m)}. Encuentre:

a. los grados de entrada de cada nodo
b. los grados de salida de cada nodo
c. los grados de cada nodo

3. Encuentre la trayectoria de longitud 2 para el siguiente dígrafo con la relación R = {(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 3)} en el conjunto A = {1, 2, 3, 4}.



4. Dadas las siguientes relaciones indique las propiedades que cumple cada una de ellas.
   R1 = {(3, 4)}
   R2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}
   R3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)}
   R4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}
   R5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

5. Dada la relación de equivalencia R = {(a, c), (a, d), (b, a), (b. d), (c, b), (c, d), (d, b), (d, c)} sobre X = {a, b, c, d}. Encuentre las siguientes clases de equivalencia:
   a. [a]
   b. [b]
   c. [c]
   d. [d]

Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Estructuras Discretas para la Computación

Prueba #7

Nombre: ______________________ Cédula: ________________ Grupo: _______

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: ______/

1. Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b, c}, indique si las siguientes relaciones son funciones o no.
   a. R1 = {(1, a), (2, b), (3, a)}
   b. R2 = {(2, a), (2, b), (3, a)}
   c. R3 = {(1, a), (1, b), (2, b), (3, a), (3, b)}

2. Dada las siguientes funciones escriba el conjunto correspondiente al dominio y al rango.
   a. f = {(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 3)}
   b. f = {(p, f), (p, e), (q, d), (r, e)}
   c. f = {(3, 5), (2, 7), (1, 9)}

3. Indique si la siguiente función es inyectiva con Dom = {1, 2, 3}, Codominio = {1, 2, 3}

   f = {(1, 2), (2, 3), (3, 3)}

4. Indique si la siguiente función es suprayectiva con Dom = {r, s, t}, Codominio = {1, 2, 3, 4}

5. Escriba la función invertida para la función *f* = {(r, 3), (s, 1), (t, 2)}

Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería de Sistemas Computacionales

Estructuras Discretas para la Computación

Prueba #8

Nombre: _______________________ Cédula: ________________ Grupo: _______

Profesor: Dr. Carlos A. Rovetto Puntos Obtenidos: ______/

1. Se define la operación binaria a*b como a + b sobre el conjunto de números enteros. Escriba las siguientes operaciones binarias:
   a. (-2) + 8
   b. 7 + (-3)

2. Compruebe si la operación binaria a*b definida como a-b con a = 7 y b = -4 es conmutativa.

3. Compruebe si la operación binaria a*b definida como 2a – (3b – c) con a=3, b=1 y c=5 es asociativa.

4. Verifique si (S, *) es un semigrupo con la operación binaria a*b de resta a-b con a = 3 y b = 5 en el conjunto Z de todos los números enteros

5. Encuentre la distancia Hamming de las palabras codificadas de n bits v1 = 101001 y v2 = 101110

6. Calcule la distancia miníma de Hamming d si queremos
   a. Detectar 2 errores
   b. Corregir 2 errores

Anexos 2: Presentaciones

ESTRUCTURAS DISCRETAS PARA LA COMPUTACIÓN

Autor: Dr. Carlos Rovetto

1

CAPÍTULO I: CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

2

CONJUNTOS

3

Conjuntos

Se denomina **conjunto** a la colección o grupo de objetos. A estos objetos también se les llama elementos o miembros de un conjunto y son delimitados por llaves.

Los conjuntos se pueden definir mediante la lista de sus elementos o utilizando las propiedades o reglas que caracterizan al conjunto.

Se le conoce como descripción tabular o de enumeración a la primera forma mientras que, a la segunda forma, se le denomina definición constructiva del conjunto o por comprensión.

Podemos definir el conjunto de manera gráfica utilizando los Diagramas de Venn.

4

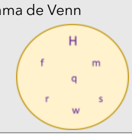
Ejemplo #1

Defina el conjunto H con los elementos f, m, q, r, s, w por

a) Enumeración

H = {f, m, q, r, s, w}

b) Diagrama de Venn



5

Ejemplo #2

Defina por comprensión

a) el conjunto D correspondientes a los días de la semana

D = {x | x es un día de la semana}

b) el conjunto I correspondiente a los números impares

I = {x | x es impar}

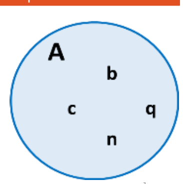
6

Conjuntos y sus miembros

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas, mientras que para denotar a sus elementos o miembros se utilizan letras minúsculas.

Ejemplo

El conjunto A con los elementos b, c, q, n se define de la siguiente forma A = {b, c, q, n}. De forma gráfica lo podemos representar utilizado los diagramas de Venn de la siguiente forma:



7

Subconjuntos

- Dados dos conjuntos A y B, se dice que B es un **subconjunto** de A si todo elemento de B es también un elemento de A.
- Esto se expresa como:

$B \subset A$

8

Ejemplo

Indique si B es un subconjunto de A en los siguientes casos:

a) A = {1, 2, 3, 6, 9}, B = {3, 6, 1}

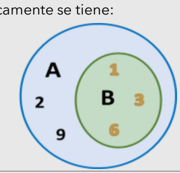
b) A = {c, d, r, f}, B = {m, p, q}

9

Ejemplo – Solución

a) A = {1, 2, 3, 6, 9}, B = {3, 6, 1}

B es un subconjunto de A porque los elementos 3, 6 y 1 están contenidos en el conjunto A, esto es, B ⊂ A. Gráficamente se tiene:

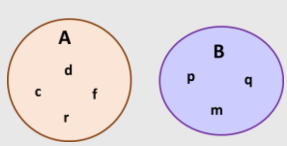


10

Ejemplo – Solución

b) A = {c, d, r, f}, B = {m, p, q}

B no es un subconjunto de A porque los elementos m, p y q no están contenidos en el conjunto A. Gráficamente se tiene:



11

Conjunto Universal

- El **conjunto universal**, denotado con la letra U, es el conjunto que contiene a todos los conjuntos.
- Se utiliza para especificar los elementos que conforman el conjunto con el cual estamos trabajando y nos permite definir al conjunto en función de un contexto dado.

Ejemplo

El conjunto U de todas las aves.

U = {x | x es un ave}

Conjunto Vacío

- El **conjunto vacío** es un conjunto que no tiene elementos.
- Este conjunto se representa como ∅ o con { }.

12

Conjunto Finito

Cuando podemos determinar la cantidad de elementos que posee el conjunto se le denomina **conjunto finito**.

Conjunto Infinito

Cuando no podemos determinar la cantidad de elementos que posee el conjunto se le denomina **conjunto infinito**.

13

Cardinalidad

La **cardinalidad** es el número de elementos de un conjunto, se representa como |A|.

14

Ejemplo

Encuentre la cardinalidad de los siguientes conjuntos

a) A = {r, s, t}

|A| = 3

b) B = {{c}, {e, g}}

|B| = 2, el tamaño de {{c}, {e, g}} es 2 y no 3, pues tiene 2 elementos, siendo el primero {c} y el segundo {e, g}

15

Conjunto Potencia

- El **conjunto potencia** de $\mathcal{P}$ (X) es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto X.
- El conjunto potencia de un conjunto con n elementos tiene 2n elementos.

16

Ejemplo

Encuentre el conjunto potencia $\mathcal{P}$(A) del conjunto A = {a, b, c}

|A| = 3, por lo que, |P(A)| = 23 = 8

$\mathcal{P}$(A) = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}

17

17

OPERACIONES DE CONJUNTOS

18

18

Operaciones de conjuntos

Las **operaciones de conjuntos** nos permiten obtener un conjunto luego de realizada las operaciones establecidas sobre los conjuntos, dicho de otra forma, podemos combinar o transformar los conjuntos.

A estas operaciones también se les conoce como álgebra de conjuntos.

19

19

Unión

- El conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B se le denomina unión de los conjuntos A y B.
- Se denota la unión de A y B por A U B.
- El conjunto resultante de esta operación tendrá a todos los elementos de A y de B, sin repetir ningún elemento.

20

20

Ejemplo

Realice la unión de los conjuntos A= {1, 2, 3, 4, 6} y B = {3, 4, 8}

A U B = {1, 2, 3, 4, 6, 8}

21

Intersección

- La intersección de dos o más conjuntos, denotada por el símbolo ∩, es aquella en donde el conjunto resultante tiene todos los elementos que son comunes a los conjuntos involucrados en la operación.
- De esta forma, la operación de intersección de dos conjuntos A y B tendrá a aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B.

22

Ejemplo

Realice la intersección de los conjuntos A = {1, 2, 3, 7} y B = {3, 4, 8}

A ∩ B = {3}

23

Conjuntos disjuntos

Cuando dos conjuntos no tienen elementos comunes se denominan conjuntos disjuntos.

Ejemplo

Compruebe que los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 7} y B = {5, 6, 9} son disjuntos.

A ∩ B = { } o **A ∩ B = Ø**

24

Complemento relativo

- A la diferencia o resta de dos conjuntos se le denomina complemento relativo.
- El resultado del complemento relativo de A – B es un conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A pero no a al conjunto B

25

25

Ejemplo

Encuentre el complemento relativo, A – B, de A = {1, 2, 3} y B = {3, 4, 5}

A – B = {1, 2}

26

26

Diferencia simétrica

La diferencia simétrica, denotada por el símbolo Δ, de dos conjuntos A y B es el conjunto formado los elementos que pertenecen a uno de los dos conjuntos, pero no a ambos conjuntos.

Ejemplo

Encuentre la diferencia simétrica, A Δ B, de A = {1, 2, 3} y B = {3, 4, 5}.

A Δ B = {1, 2, 4, 5}

27

27

Propiedades del Álgebra de conjuntos

Al estudio de las operaciones básicas que pueden realizarse con conjuntos se le llama álgebra de conjuntos. Algunas de estas operaciones como lo son la unión, intersección y complementación poseen propiedades similares a las operaciones con números naturales a las que se le denominan leyes del algebra de conjuntos.

28

28

Idempotencia

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Distributiva

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ley de Morgan

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Conmutativa

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup B = B\ A$

Asociativa

- $A \cup (A \cup B) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (A \cap B) = (A \cap B) \cap C$

Ley de diferencia

- $(A - B) = A \cap B^C$

29

29

Leyes del complemento

- $A \cup A^C = U$
- $A \cap A^C = \emptyset$
- $(A^C)^C = A$
- $A^C = \emptyset$
- $\emptyset^C = U$

Leyes de la absorción

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \cup (A^C \cap B) = A \cup B$
- $A \cap (A^C \cup B) = A \cap B$

30

30

Principio de la adición para conjuntos disjuntos

- El principio de adición es usado para contar los elementos de dos o más conjuntos. Para ello se debe primero distinguir los elementos que dichos conjuntos tengan en común, si es el caso.
- En este punto se tendrán los siguientes casos:

  a) Los conjuntos no tienen elementos comunes

  b) Los conjuntos tienen elementos comunes

31

31

a) Los conjuntos no tienen elementos comunes

Se suman los elementos de los conjuntos.

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

b) Los conjuntos tienen elementos comunes

Se suman los elementos de los conjuntos y se restan los elementos que tienen en común.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Si se tienen más de dos conjuntos, por ejemplo, tres conjuntos: se suma el cardinal de los conjuntos, se resta el cardinal de todas las posibles intersecciones de dos conjuntos y por último se suma el cardinal de la intersección de los tres conjuntos.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

32

32

Ejemplo

Utilizando el principio de adición, encuentre la cantidad de elementos de |A ∪ B| para los siguientes casos:

a) A = {1, 2, 6}, B = {3, 4, 5}

b) A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}

c) A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}, C = {1, 4, 7}

33

Ejemplo – Solución

a) A = {1, 2, 6}, B = {3, 4, 5}

$A \cap B = \emptyset$

$|A \cup B| = |A| + |B|$

$|A \cup B| = 3 + 3$

$|A \cup B| = 6$

34

Ejemplo – Solución

b) A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5}

$|A \cap B| = 2$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B| = 4 + 3 - 2$

$|A \cup B| = 5$

35

Ejemplo – Solución

c) A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}, C = {1, 4, 7}

$|A \cap B| = 1$

$|A \cap C| = 1$

$|B \cap C| = 1$

$|A \cap B \cap C| = 0$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cup B \cup C| = 3 + 3 + 3 - 1 - 1 - 1 + 0$

$|A \cup B \cup C| = 6$

36

SUCESIONES

37

37

Sucesiones

A la lista de elementos dispuestos en orden siguiendo una regla o patrón se le denomina **sucesión**.

A los elementos pertenecientes a una sucesión se les llama **términos**.

Para indicar una sucesión se usa la notación $\{a_n\}$ o (a_n). Para indicar la posición de cada término en la sucesión se utiliza un subíndice

$$a_m , a_{m+1} , a_{m+2} , \dots , a_n$$

en donde, m es el subíndice del término inicial y n es el subíndice del término final al cual se le denomina término general de la sucesión.

38

38

Ejemplo

Escriba los términos y su posición de la siguiente sucesión $\{a_n\} = 3, 6, 9, 12, \dots$

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 6$$
$$a_3 = 9$$
$$a_4 = 12$$

39

Sucesiones

El término inicial en la sucesión puede tener el valor de uno o cero. A partir del término general se puede calcular la posición de cualquier término de la sucesión utilizando la siguiente fórmula $a_n = 2n$.

En informática es de gran importancia las sucesiones de caracteres, letras u otros símbolos que se encuentran escritos sin las comas, a estos se les denominan **cadenas**. Las cadenas se forman sobre el conjunto de caracteres llamado **alfabeto**.

40

40

Fórmulas recursivas y explícitas

La fórmula **recursiva** o **recurrente** es aquella que para definir el término siguiente hace referencia al término anterior. Además, se deben indicar el punto de partida de la fórmula.

Ejemplo

Defina la siguiente sucesión $b_1 = 2,\ b_n = b_{n-1} + 3$

$\boldsymbol{b_n = 2, 5, 8, 11, \ldots}$

41

41

Fórmulas recursivas y explícitas

Cuando se indica el valor que tiene cualquier término en particular, se está utilizando las fórmulas **explícitas**.

Ejemplo

Defina la siguiente sucesión $a_n = 3n + 1$ para $1 \leq n \leq 4$

$\boldsymbol{\{a_n\} = 4, 7, 10, 13, \ldots}$

42

42

Sucesiones finitas e infinitas

Una sucesión es **finita** cuando puede finalizar después de n pasos. Para encontrar los términos de una sucesión finita, hallamos los términos de la sucesión hasta el número n que se indique.

Ejemplo

Encontrar los 5 primeros términos de la siguiente sucesión finita:

$$(b_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

Remplazando n = 1, 2, 3, 4, 5 tenemos:

$$\boldsymbol{\{a_n\} = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}}$$

43

43

Sucesiones finitas e infinitas

Cuando sucesión continúa indefinidamente se denomina sucesión es **infinita**.

Ejemplo

$\boldsymbol{\{a_n\} = 3, 6, 9, 12}$

44

44

Conjunto correspodiente a una sucesión

- Denominamos conjunto correspondiente a una sucesión a todos los elementos distintos que constituyen la sucesión.
- A pesar de que es importante el orden que tienen los elementos en una sucesión, para este caso como se está trabajando con conjuntos, cuando se enlistan los elementos en el conjunto su orden no es significativamente relevante.

Ejemplo

Escriba el conjunto correspondiente a los elementos de la sucesión de los cuadrados de los números naturales.

$\{1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots\}$

45

Función característica

- Podemos definir la función característica como una regla que le asigna un valor a cada elemento de un conjunto. Este concepto es muy útil cuando se trabaja con los conjuntos.
- Cuando los valores que son asignados por la función característica son números, las funciones características se pueden sumar y multiplicar. Otro uso que tienen esta función es en la representación de conjuntos en una computadora.

46

Ejemplo

Defina la función característica f_A de A, si A es un subconjunto de un conjunto universal U.

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

47

Representación en computadora de conjuntos y subconjuntos

- Para poder representar un conjunto o subconjunto en la computadora se debe disponer sus elementos en una sucesión.
- Cuando el conjunto universal U es finito y $A \subset U$ entonces podemos usar la función característica f_A para representar la sucesión de ceros y unos de determinada longitud, a la cual le podemos denominar n. En este caso la función característica le asignará un 1 a los elementos que pertenecen a A y 0 a los que no pertenecen a A.

48

Ejemplo

Escriba la sucesión correspondiente a la representación de la función característica f_A usando los siguientes conjuntos U = {1, 2, 3, 4, 5} y A = {2, 4, 5}

$\{a_n\} = 0, 1, 0, 1, 1$

49

Representación en computadora de conjuntos y subconjuntos

- De esta forma, por medio de la función característica podemos representar en una computadora un conjunto universal como un arreglo A de longitud n. En donde, la asignación de un 1 o un 0 en cada posición A[k] del arreglo A especifica un subconjunto que es único de U.

50

Ejemplo

Represente el arreglo del subconjunto A de la sucesión $\{a_n\} = 0,1,0,1,1$ correspondiente a la representación de la función característica f_A de los conjuntos U = {1, 2, 3, 4, 5} y A = {2, 4, 5}

0	1	0	1	1

51

TÉCNICAS DE CONTEO

52

Técnicas de conteo

- Las técnicas de conteo son estrategias matemáticas que se utilizan para contar varios conjuntos de objetos de gran tamaño y, en donde, dicha tarea se convierte en algo complicado.
- Estas técnicas son muy usadas en probabilidad y estadística y en función de su complejidad las podemos dividir en dos grupos conformados de la siguiente forma:

Por el principio multiplicativo y el principio aditivo

Por las combinaciones y las permutaciones

53

Técnicas de conteo

Reglas de la suma y el producto

Teoremas sobre el principio de la multiplicación

Permutaciones

Combinaciones

54

Reglas de la suma y el producto

- La **regla de la suma** la podemos enunciar de la siguiente forma: dados dos sucesos S1 y S2, donde S1 puede ocurrir de "a" maneras y S2 puede ocurrir de "b" maneras y se cumple que ambos sucesos no pueden ocurrir al mismo tiempo, entonces la suma de ambos sucesos puede ocurrir de a + b maneras. Se entiende que este principio puede ser extendido a más de dos sucesos.
- A partir del enunciado anterior y trabajando con la teoría de conjuntos podemos aplicar el principio de la adición para conjuntos disjuntos.

55

Reglas de la suma y el producto

- La **regla del producto** se define de manera similar: dados dos sucesos independientes S1 y S2, donde S1 puede ocurrir de "a" maneras y S2 puede ocurrir de "b" maneras, entonces el producto de ambos sucesos puede ocurrir de a · b maneras. Se entiende que este principio puede ser extendido a más de dos sucesos.

56

Teoremas sobre el principio de la multiplicación

- El **principio de multiplicación** se utiliza cuando se necesita contar los elementos de un conjunto de producto cartesiano, en donde, los elementos del conjunto con el que estamos trabajando están formados por pares de elementos.

57

57

Teoremas sobre el principio de la multiplicación

- Recordemos que en este tipo de conjuntos el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto. El teorema indica que se debe multiplicar el número de elementos de cada conjunto como se muestra en la siguiente fórmula, sean A y B dos conjuntos, para conocer la cantidad de elementos del producto cartesiano

|A x B| = |A| x |B|

También podemos generalizar esta fórmula a tres o más conjuntos:

|A x B x C| = |A| x |B| x |C|

58

58

Permutaciones

- A la disposición en orden de los elementos de un conjunto se le conoce como permutación. En el caso de que el conjunto ya se encuentre ordenado de una forma distinta a la cual se necesita que este se encuentre ordenado, entonces se tendrá que volver a ordenar, al proceso de reorganizar sus elementos se llama permutar.
- La siguiente fórmula nos permite calcular el número de permutaciones de "n" elementos tomados de "k" en "k":

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

59

59

Ejemplo

Tres personas se han presentado a un concurso. El concurso otorga $400 al primer lugar y $200 al segundo. ¿De cuántas formas se pueden repartir los premios de primer y segundo lugar?

Dado que en este ejemplo si importa el orden debido a que los premios son diferentes, se verifica que estamos frente a un problema de permutación. Para resolverlo tenemos que:

- n= 3 será el número total de participantes
- k= 2 serán los premios

Desarrollamos la formula:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$P_2^3 = 6$$

60

60

Combinaciones

◦ Cuando se hace una selección sin tener en cuenta el orden de los elementos de un conjunto se le denomina combinación.

◦ La siguiente fórmula nos permite calcular el número de combinaciones de "n" elementos tomados de "k" en "k":

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

61

61

Ejemplo #1

Dados n = 10 y k = 3, encuentre el número de combinaciones.

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!\,3!}$$

$$C_3^{10} = 120$$

62

62

Ejemplo #2

Dado un grupo de 10 personas, de estos se tiene que 4 son mujeres y 6 son hombres. Determine:

a) el número de formas en que se puede elegir un representante del grupo

b) el número de formas en que se puede elegir un comité de 3 miembros, donde al menos uno de los miembros sea mujer

a) de las 10 personas solo se elige una persona sin importar el orden

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_1^{10} = \frac{10!}{(10-1)!\,1!}$$

$$C_1^{10} = 10\ formas$$

63

63

Ejemplo #2 (continuación)

b) en la segunda pregunta se nos solicita que al uno de los 3 miembros sea mujer nos permite tener un comité formado por 1, 2 o 3 mujeres. Por lo tanto, se deben considerar esas tres opciones en nuestro resultado. Se desarrollará cada uno de los escenarios por separado y al final se totalizarán cada resultado para encontrar el resultado final.

1) si el comité está formado por una mujer, tendremos una combinación de 1 mujer del grupo de 4 y 2 hombres del grupo de 6.

$$C_1^4\,x\,C_2^6 = \frac{4!}{(4-1)!\,1!}\,x\,\frac{6!}{(6-2)!\,2!}$$

$$C_1^4\,x\,C_2^6 = 4\,x\,15$$

$$C_1^4\,x\,C_2^6 = 60\ formas$$

64

64

Ejemplo #2
(continuación)

b) en la segunda pregunta se nos solicita que al uno de los 3 miembros sea mujer nos permite tener un comité formado por 1, 2 o 3 mujeres. Por lo tanto, se deben considerar esas tres opciones en nuestro resultado. Se desarrollará cada uno de los escenarios por separado y al final se totalizarán cada resultado para encontrar el resultado final.

2) si el comité está formado por dos mujeres, tendremos una combinación de 2 mujeres del grupo de 4 y 1 hombre del grupo de 6.

$$C_2^4 x\, C_1^6 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!}\; x\; \frac{6!}{(6-1)!\,1!}$$

$$C_2^4 x\, C_1^6 = 6\, x\, 6$$

$$C_2^4 x\, C_1^6 = 36\ formas$$

65

Ejemplo #2
(continuación)

b) en la segunda pregunta se nos solicita que al uno de los 3 miembros sea mujer nos permite tener un comité formado por 1, 2 o 3 mujeres. Por lo tanto, se deben considerar esas tres opciones en nuestro resultado. Se desarrollará cada uno de los escenarios por separado y al final se totalizarán cada resultado para encontrar el resultado final.

3) si el comité está formado por tres mujeres, tendremos una combinación de 3 mujeres del grupo de 4 y no se selecciona ningún hombre.

$$C_3^4 x\, C_0^6 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!}\; x\; \frac{6!}{(6-0)!\,0!}$$

$$C_3^4 x\, C_0^6 = 4\, x\, 1$$

$$C_3^4 x\, C_0^6 = 4\ formas$$

En total:

60 + 36 + 4 = 100 formas tener un comité formado por 1, 2 o 3 mujeres

66

CAPÍTULO II: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RELACIONES Y FUNCIONES DE UN CONJUNTO

67

RELACIONES Y GRAFOS DIRIGIDOS

68

Producto cartesiano o conjunto producto

- Se denomina producto cartesiano o conjunto producto A x B de dos conjuntos no vacíos A y B, al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) en donde a ∈ A y b ∈ B. Formalmente, se define de la siguiente forma:

A x B = {(a, b) | a ∈ A y b ∈ B}

- También se define el par ordenado (a, b) como el listado de los elementos a y b en un orden establecido, esto es, en el primer término aparece a y en el segundo término aparece b. A partir de esta definición, podemos indicar que un par ordenado es una secuencia de longitud 2. Además, se verifica la igualdad de dos pares ordenados (a1, b1) y (a2, b2) cuando se cumple que a1 = a2 y b1 = b2. También se cumple que el cardinal de los conjuntos A y B corresponde al tamaño de un producto cartesiano A × B, esto es, A x B = |A| x |B|.

69

69

Ejemplo

Encuentre el producto cartesiano de los conjuntos A = {1, 2} y B = {3, 4, 5}.

A x B = {1, 2} × {3, 4, 5}

A x B = {(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)}

70

70

RELACIONES Y DÍGRAFOS

71

Relaciones

- Una **relación R** de **A** a **B**, donde ambos conjuntos no están vacíos, es un subconjunto de A x B. De esta forma, a está relacionado con b por R (aRb) si R ⊆ A x B y (a, b) ∈ R, lo contrario será que a no está relacionado con b por R ($a \not R b$)

- Tendremos una relación sobre A, R ⊆ A x A, (no se denomina una relación de A a A) cuando A y B son iguales.

72

72

Ejemplos

Ejemplo #1

Defina la relación aRb de los conjuntos A = {c, d, e} y B = {m, n}

R = {(c, m), (c, n), (d, m), (d, n), (e, m), (e, n)}

Ejemplo #2

Defina la relación aRb de a < b en A = {1, 2, 3, 4, 5}.

R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)}

73

73

Conjuntos que surgen de las relaciones

Dominio y Rango de la Relación

- El conjunto de elementos de A que están relacionados con algún elemento de B se le denomina **dominio de R** y está denotado por **Dom(R)**. En esta definición el subconjunto de A en el dominio, es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares que forman R.
- Por otro lado, el conjunto de elementos de B que están relacionados con algún elemento de A se le denomina el **rango de R** y es designado por **Ran(R)**.

74

74

Ejemplo

Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c, d} que tienen una relación R de A a B igual a R = {(2, c), (1, d), (3, d), (2, a)}. Encuentre el dominio y el rango de R.

Dom(R) = {1, 2, 3}
Ran(R) = {a, c, d}

75

75

Conjuntos que surgen de las relaciones

Relación inversa

La relación que asocia a los elementos de B con los de A de los conjuntos A, B y con una relación R ⊆ A x B se denomina relación inversa de R, y se representa por R-1. Formalmente se define como:

R^{-1} **= {(b, a) ∈ A x B | (a, b) ∈ R}**

76

76

Conjuntos que surgen de las relaciones

Matriz de una relación

Se utiliza para representar una relación R de X a Y, se etiquetan las filas con elementos de X y las columnas se etiquetan con los elementos de Y. Se representa R por la matriz m x n, $M_R = [m_{ij}]$, la cual se define por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; (x_i, y_j) \in R \\ 0 \; si \; (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

77

Ejemplo

Escriba la matriz de relación MR, de R = {(1, b), (1, d), (2, c), (3, c), (3, b), (4, a)} y los conjuntos X = {1, 2, 3, 4} y Y = {a, b, c, d}.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

78

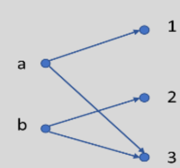
Dígrafos

- Los dígrafos nos permiten expresar gráficamente las relaciones. Una relación de A en B se representa dibujando un círculo para cada elemento tanto de A como de B a los cuales se les denomina **nodos**. Estos nodos estarán conectados entre sí mediante líneas rectas denominadas **arcos** si el par x ∈ A, y ∈ B está en la relación.
- Los arcos tienen una dirección que está indicada mediante una flecha a estos se les denominan **arcos dirigidos**. La dirección del arco empieza en el primer elemento del par y termina en el segundo elemento del par. Al grafo resultante se le denomina **grafo dirigido** o **dígrafo**.
- Formalmente se define un grafo dirigido o dígrafo como un par ordenado D = (A, R), donde:
  - A es un conjunto finito denominado conjunto de nodos de D
  - R es una relación binaria definida sobre A y cuyos elementos de R se le denominan arcos de D.

79

Ejemplo

Dibuje el grafo dirigido de la relación R = {(a, 1), (a, 3), (b, 2), (b, 3)}.



80

Dígrafos

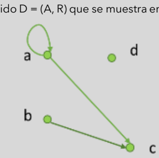
Otras definiciones importantes relacionadas con los dígrafos son:

- El grado interno o grado de entrada (gre) de un nodo: es el número de aristas que terminan en ese nodo.
- El grado externo o grado de salida (grs) de un nodo: es el número de aristas que salen de ese nodo.
- El grado de un nodo (gr): es la suma de sus grados internos y externos, esto es, gr(v) = gre + grs.

81

Ejemplo

Dado el grafo dirigido D = (A, R) que se muestra en la figura



con el conjunto A = {a, b, c, d} y R = {(a, a), (a, c), (b, c)}. Encuentre:

a) los grados de entrada de cada nodo

b) los grados de salida de cada nodo

c) los grados de cada nodo

82

Ejemplo
(solución)

a) Los grados de entrada son:

$gr_e(a) = 1$
$gr_e(b) = 0$
$gr_e(c) = 2$
$gr_e(d) = 0$

b) Los grados de salida son:

$gr_s(a) = 2$
$gr_s(b) = 1$
$gr_s(c) = 0$
$gr_s(d) = 0$

c) Los grados de cada nodo son:

gr(a) = 1 + 2 = 3
gr(b) = 0 + 1 = 1
gr(c) = 2 + 0 = 2
gr(d) = 0 + 0 = 0

83

Trayectoria en relaciones y dígrafos

- Una secuencia finita $\pi: a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ que comienza con a y termina con b, tal que

$$a\ R\ x_1, x_1\ R\ x_2, \ldots, x_{n-1}\ R\ b$$

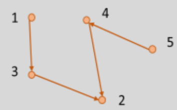
es una trayectoria de longitud n en una relación R sobre un conjunto A de a a b.

- Una trayectoria de longitud n involucra n+1 elementos de A.
- Con la ayuda del dígrafo de la relación se puede observar visualmente con más facilidad una trayectoria. La longitud de una trayectoria es el número de arcos que la misma posee. Se llama ciclo a una trayectoria que comienza y termina en el mismo vértice.

84

Ejemplo

Encuentre la trayectoria de longitud 2 para el siguiente dígrafo con la relación R = {(1, 3), (3, 2), (4, 2), (5, 4)} en el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}.



Las trayectorias de longitud 2 son:

- **π**: 1, 3, 2
- **π**: 5, 4, 2

85

Trayectoria en relaciones y dígrafos

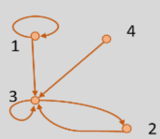
- Cuando hay una **trayectoria de longitud n de x a y en R**, se define una relación $\mathbf{R^n}$ sobre A como **x** $\mathbf{R^n}$ **y**.

- Existe una relación de conectividad para R, R^∞ sobre A, cuando hay alguna trayectoria en R de x a y la cual se denota como **x** $\mathbf{R^\infty}$ **y**. El conjunto de esta relación de conectividad R^∞ está formado por todos los vértices que puede alcanzarse desde x por alguna trayectoria de R.

86

Ejemplo

Utilizando el siguiente grafo



calcular:

a) R2

b) R^∞

87

Ejemplo (solución)

a) R^2

1 R^2 1 puesto que 1 R 1 y 1 R 1

1 R^2 2 puesto que 1 R 3 y 3 R 2

2 R^2 2 puesto que 2 R 3 y 3 R 2

R^2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 2)}

b) R^∞ = {(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 2), (4, 3), (4, 2)}

En esta relación de conectividad se verifican todos los pares ordenados de vértices para los cuales haya una trayectoria de cualquier longitud del primer vértice al segundo.

88

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Para las siguientes propiedades la relación R está definida sobre un conjunto A.

89

Propiedad reflexiva

- También conocida como idéntica. Si para todo x ∈ A entonces (x, x) ∈ R y es reflexiva. En resumen, el elemento está relacionado consigo mismo ∀ x ∈ A se cumple que (x, x) ∈ R.

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es reflexiva.

La relación R es reflexiva, se verifica que cada elemento x ∈ X, (x, x) ∈ R.

90

Propiedad antirreflexiva

- También conocida como irreflexiva. Si para todo x ∈ A se cumple que x no está relacionado consigo mismo, es decir que (x, x) ∉ R entonces la relación es antirreflexiva.

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,2), (2,1), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es antirreflexiva.

La relación R es antirreflexiva, se verifica que cada elemento x ∈ X, (x, x) ∉ R.

91

Propiedad simétrica

- Una relación R es simétrica si para todo x, y ∈ A existe (x, y), (y, x) ambos pares pertenecientes a R. En resumen, ∀ x, y ∈ A se cumple que si (x, y) ∈ R entonces (y, x) ∈ R.

92

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2), (4,4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es simétrica

Se verifica que cada par (x, y) y (y, x) exista en la relación
(1,3), (3,1)
(2,4), (4,2)

esta condición se cumple en los pares anteriores.

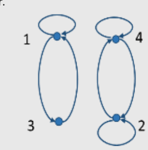
En los siguientes pares se encuentran implícitos
(1,1), (2,2), (4,4)

Por lo tanto, la relación es simétrica

93

Propiedad simétrica

- En una relación simétrica el grafo posee arcos dirigidos en ambas direcciones, es decir, de v a w y de w a v. De esta forma el grafo cumple con esta propiedad. Esto se muestra en el siguiente grafo correspondiente a la relación R = {(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2), (4,4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} del ejemplo anterior.



94

Propiedad antisimétrica

Una relación R es antisimétrica si para todo x, y ∈ X se cumple en R alguna de las siguientes condiciones:

- si (x, y) ∈ R y (y, x) ∉ R o (y, x) ∈ R y (x, y) ∉ R entonces x ≠ y
- si (x, y) ∈ R y (y, x) ∈ R entonces x = y

95

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}, sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es antisimétrica.

Se verifica que si existe el par (x, y) en R no exista el par (y, x) en R para x ≠ y
(1,2) ∈ R pero (2, 1) ∉ R
(1,3) ∈ R pero (3, 1) ∉ R
(1,4) ∈ R pero (4, 1) ∉ R
(2,3) ∈ R pero (3, 2) ∉ R
(2,4) ∈ R pero (4, 2) ∉ R
(3,4) ∈ R pero (4, 3) ∉ R

Se verifica que existe el par (x, y) en R para x = y
{(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

Entonces la relación R es antisimétrica.

96

Propiedad asimétrica

- Una relación R es asimétrica si para todo x, y ∈ X, si (x, y) ∈ R entonces (y, x) ∉ R.

- Por definición los pares (n, n) no pueden estar en esta propiedad. También se verifica que las relaciones asimétricas son antirreflexivas.

97

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)} sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es asimétrica.

Se verifica que si existe el par (x, y) en R no exista el par (y, x) en R

(1,2) ∈ R pero (2, 1) ∉ R

(1,3) ∈ R pero (3, 1) ∉ R

(1,4) ∈ R pero (4, 1) ∉ R

(2,3) ∈ R pero (3, 2) ∉ R

(2,4) ∈ R pero (4, 2) ∉ R

(3,4) ∈ R pero (4, 3) ∉ R

Entonces la relación R es asimétrica.

98

Propiedad transitiva

- Una relación R es transitiva si se cumple que, para todo x, y, z ∈ A, si (x, y), (y, z) ∈ R entonces (x, z) ∈ R.

99

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)}, sobre el conjunto X = {1, 2, 3, 4} es transitiva.

Se verifica que si existe (x, y) y (y, z) en R exista (x, z) en R

(x, y)	(y, z)	(x, z)
(1, 2)	(2, 3)	(1, 3)
(1, 2)	(2, 4)	(1, 4)
(1, 3)	(3, 4)	(1, 4)
(2, 3)	(3, 4)	(2, 4)

Entonces la relación R es transitiva.

100

Relaciones de equivalencia

◦ Sea R una relación sobre un conjunto A, si R es una relación reflexiva, simétrica y transitiva entonces es una relación de equivalencia.

101

Ejemplo

Indique si la siguiente relación R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,4), (1,4), (3,1), (4,3), (4,1)} sobre A = {1, 2, 3, 4} es una relación de equivalencia

1. Se verifica que la relación R es reflexiva porque (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) ∈ R.
2. Se verifica que la relación R es simétrica porque (1, 3) ∈ R y (3, 1) ∈ R, (3, 4) ∈ R y (4, 3) ∈ R, (1, 4) ∈ R y (4, 1) ∈ R.
3. Se verifica que la relación R es transitiva porque (1, 3), (3, 4) y (1, 4) ∈ R, (3, 1), (1, 3) y (3, 3) ∈ R, (1, 4), (4, 3) y (1, 3) ∈ R, (4, 1), (1, 4) y (4, 4) ∈ R.

Como la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva entonces R es una relación de equivalencia.

102

Clases de equivalencia

◦ Se definen las clases de equivalencia a partir de relación de equivalencia R sobre un conjunto A.

◦ El conjunto de todos los elementos x que están relacionados con un elemento "a" del conjunto A, al cual denotamos como [a], se le denomina **clase de equivalencia**. Formalmente se define como **[a] = {x ∈ A | x R a}**.

103

Ejemplo

Dada la relación de equivalencia R = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 4)} sobre X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Encuentre las siguientes clases de equivalencia:

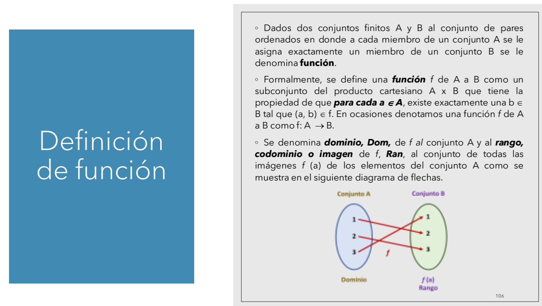
a. [1]
b. [2]
c. [3]
d. [4]

Para encontrar las clases de equivalencia debemos considerar la definición [a] = {x ∈ A | x R a}, entonces para el primer caso tendremos que la clase de equivalencia de [1] que contiene a 1 consiste en todas las x tales que (x, 1) ∈ R y de manera similar los demás casos.

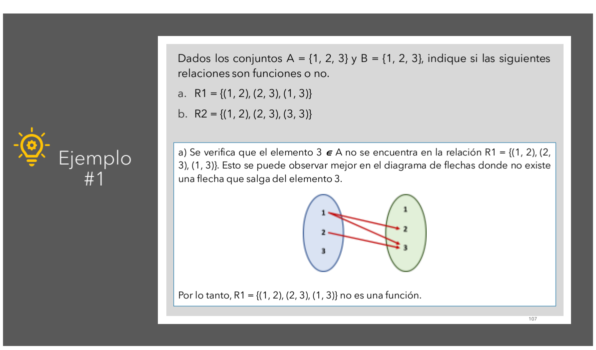
a. [1] = {1, 3, 5}
b. [2] = [6] = {2, 6}
c. [3] = [5] = {1, 3, 5}
d. [4] = {4}

104

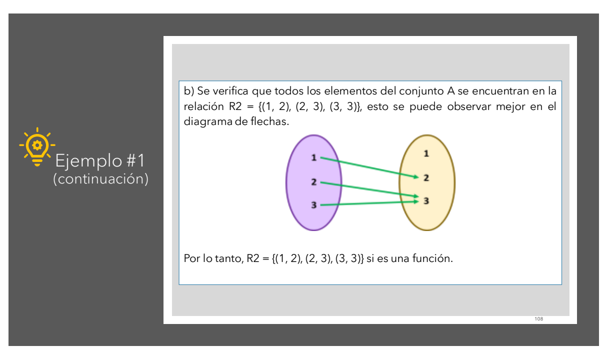
105



106



107



108

Ejemplo #2

Dada la siguiente función f = {(1, a), (2, b), (3, a)} escriba el conjunto correspondiente al dominio y al rango.

Dom = {1, 2, 3}

Ran = {a, b, c}

109

TIPOS DE FUNCIONES ESPECIALES

110

Función inyectiva

◦ La función inyectiva, también denominada de uno a uno, es aquella en donde cada elemento del codominio o rango tiene un único elemento del dominio. En esta función dos pares no van a tener el mismo segundo elemento.

111

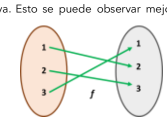
Ejemplo

Indique si la siguiente función es inyectiva con Dom = {1, 2, 3}, Codominio = {1, 2, 3}

f = {(1, 2), (2, 3), (3, 1)}

Verificamos la función con la definición y nos apoyaremos del diagrama de flechas para ver la función con mayor claridad.

Como los pares no tienen el mismo segundo elemento se concluye que la función es inyectiva. Esto se puede observar mejor en el diagrama de flechas.



112

Función suprayectiva

◦ Si cada elemento del codominio aparece en algún par ordenado entonces la función es suprayectiva. A esta función también se le conoce como sobreyectiva. De forma resumida en este tipo de función, no sobran elementos en el codominio

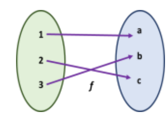
113

Ejemplo

Indique si la siguiente función es suprayectiva con Dom = {1, 2, 3}, Codominio = {a, b, c}

f = {(1, a), (2, c), (3, b)}

Como no sobran elementos en el codominio se concluye que la función es suprayectiva. Esto se puede observar mejor en el diagrama de flechas.



114

Función invertida

◦ Una función invertida es uno a uno y sobreyectiva de Y a X, {(y, x) | (x, y) ∊ *f*}. Recordemos que f es una función uno a uno, sobre de X a Y. A este tipo de función se le denotada como f^{-1}.

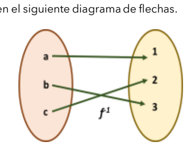
115

Ejemplo

Escriba la función invertida para la función f = {(1, a), (2, c), (3, b)} con Dom = {1, 2, 3}, Codominio = {a, b, c}.

f -1 = {(a, 1), (c, 2), (b, 3)}

Esta se muestra en el siguiente diagrama de flechas.



116

Funciones idénticas

Se dice que dos funciones, f: A → B y g: C → D, son idénticas cuando cumplen lo siguiente:

1. tienen el mismo dominio, A = C
2. tienen el mismo codominio, B = D
3. asignan la misma imagen a cada elemento del dominio, esto es, para cada x ∈ A y x ∈ B se tiene que $f(x) = g(x)$.

117

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, donde g una función de X a Y y f una función de Y a Z, la función (f ∘ g) (x) = f (g(x)) de X a Z es la composición de f con g. A esta composición se le denota como $f \circ g$.

118

Ejemplo

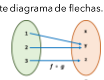
Escriba la composición $f \circ g$ de X a Z de las funciones

g = {(1, a), (2, a), (3, c)} una función de X = {1, 2, 3} a Y = {a, b, c} y

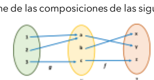
f = {(a, y), (b, x), (c, z)}, una función de Y a Z = {x, y, z}

$f \circ g$ = {(1, y), (2, y), (3, z)}

Esta se muestra en el siguiente diagrama de flechas.



Este resultado se obtiene de las composiciones de las siguientes funciones



119

119

CAPÍTULO III: SEMIGRUPOS, GRUPOS Y CODIFICACIÓN DE INFORMACIÓN BINARIA

120

120

SEMIGRUPOS Y GRUPOS

121

121

OPERACIONES BINARIAS SOBRE UN CONJUNTO

122

Definiciones

◦ A la regla que asigna a cada pareja ordenada de elementos de un conjunto A un único elemento del mismo conjunto A se le denomina operación binaria. A estas operaciones binarias se le denota por el símbolo *, por otro lado, al elemento asignado se le denota como a*b, en donde a y b son elementos de A y a*b ∈ A.

123

123

Ejemplo

Se define la operación binaria a*b como máx{a, b} sobre el conjunto de números enteros. Escriba las siguientes operaciones binarias:

a. 2*4
b. -3*(-5)

a. 2*4 = máx{2, 4} = 4
2*4 = 4

b. -3*(-5) = máx{-3,-5} = -3
-3*(-5) = -3

124

124

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BINARIAS

125

Propiedad conmutativa

◦ Si a*b = b*a para todos los elementos a y b en el conjunto A, entonces la operación binaria * sobre el conjunto A es conmutativa.

126

Ejemplo

Compruebe si la operación binaria a*b definida como a+b con a = 5 y b = 2 es conmutativa.

Verificamos que se cumpla la definición a*b = b*a que para nuestro ejemplo es

a+b = b+a

a+b = 5+2
a+b = 7

b+a = 2+5
b+a = 7

Por lo tanto, se cumple que a+b = b+a y la operación binaria 2 es conmutativa.

127

Propiedad asociativa

◦ Si a*(b*c) = (a*b)*c para todos los elementos a, b y c en el conjunto A, entonces la operación binaria * sobre un conjunto A es asociativa.

128

Ejemplo

Compruebe si la operación binaria a*b definida como 2a+(b+c) con a=3, b=4 y c=1 es asociativa.

Verificamos que se cumpla la definición a*(b*c) = (a*b)*c que para nuestro ejemplo es 2a+(b+c)

$2a+(b+c) = 2·3 + (4+1)$
$2a+(b+c) = 11$

$(2a+b)+c = (2·3 +4) + 1$
$(2a+b)+c = 11$

Por lo tanto, se cumple que a*(b*c) = (a*b)*c y la operación binaria 2 es asociativa.

129

PROPIEDADES DE LOS SEMIGRUPOS

130

Definiciones

- A la operación binaria asociativa * definida en un conjunto no vacío S se le denomina semigrupo y se denota como (S, *).
- Al semigrupo en donde la operación es conmutativa se le denomina semigrupo conmutativo, también conocido como abeliano.
- Por otro lado, al semigrupo M = (M, ∗) con una operación binaria con el elemento unidad, también llamado elemento unidad para la multiplicación y elemento neutro para la adición, se le denomina monoide. Cuando la operación es conmutativa al monoide se le denomina monoide conmutativo o abeliano.

131

Teoremas de los semigrupos

Una forma de verificar si una operación binaria definida sobre un conjunto pertenece a un semigrupo es verificando que cumpla con estos dos teoremas:

Teorema 1

Si (S, *) es un semigrupo y xi ∈ S, entonces $x_1 * x_2 * x_3 * ... * x_n$ es un miembro único de S ∀ n ∈ N.

Teorema 2

Si (S, *) es un semigrupo conmutativo, entonces $(x*y)n = x^n * y^n$ ∀ x ∈ S y ∀ n ∈ N.

132

Ejemplo

Verifique si (S, *) es un semigrupo con la operación binaria a*b de máximo de a, b, para todo a, b y c que pertenecen al conjunto los números reales R.

Verificando la definición de semigrupo tenemos que:

1. la operación binaria a*b de máximo de a, b, para todo a, b y c es asociativa porque Máx {máx {a,b}, c} = Máx {a, máx {b,c}}
2. ∀ a, b, c ∈ R

Por lo tanto, (R, *) es semigrupo

133

PRODUCTOS Y COCIENTES DE LOS SEMIGRUPOS

134

Productos de los semigrupos

◦ Se define el producto de X y Y, dos subconjuntos del semigrupo S, por XY = {xy | x ∈ X, y ∈ Y}

135

Cocientes de los semigrupos

◦ Para comprender mejor la definición de cociente de semigrupos se define la relación de equivalencia estable de un semigrupo como:

Dado un semigrupo S y una relación de equivalencia sobre S, ≡. Si se verifica que para todo *a; a'; b; b' ∈ S* tales que *a* ≡ *a'* y *b* ≡ *b'*, se tiene *a:b* ≡ *a':b'* entonces se dice que la relación ≡ es estable con la operación : *en* (*S; :*)

136

Teorema

◦ Sea (S; :) un semigrupo y ≡ una relación de equivalencia estable con la operación :. Entonces, (S= ≡; :) es un semigrupo llamado semigrupo cociente de (S; :) sobre ≡.

137

GRUPOS

138

Definiciones

◦ Se define un grupo [G, •], si G es un conjunto no vacío y la operación binaria • sobre G cumple con las siguientes condiciones:

1) la operación binaria • es asociativa
2) existe, en G, un elemento identidad
3) cada elemento perteneciente a G tiene inverso, con respecto a la operación binaria • en G

◦ Cuando la operación binaria • en el grupo G es conmutativa se le denomina grupo conmutativo.

139

Teoremas de los grupos

◦ A la operación binaria asociativa * definida en un conjunto no vacío S se le denomina semigrupo y se denota como (S, *).

◦ Al semigrupo en donde la operación es conmutativa se le denomina semigrupo conmutativo, también conocido como abeliano.

◦ Por otro lado, al semigrupo M = (M, ∗) con una operación binaria con el elemento unidad, también llamado elemento unidad para la multiplicación y elemento neutro para la adición, se le denomina monoide. Cuando la operación es conmutativa al monoide se le denomina monoide conmutativo o abeliano.

140

Teoremas de los semigrupos

Las definiciones anteriores se resumen en los siguientes teoremas:

Teorema 1

Si (G, *) es un Grupo y a, b, x ∈ G, entonces ax = b, si sólo si, x = a–1 b y xa = b, si y sólo si x = ba-1

Teorema 2

(G, *) es un Grupo y a, b, c ∈ G, si ab = ac o ba = ca, entonces b = c. Llamada Ley de Cancelación.

Teorema 3

(G, *) es un Grupo finito y a ∈ G, entonces an = 1 para algún n ∈ G.

141

Ejemplo

Verifique si (R+, •) es un grupo, donde R+ es el conjunto de los números reales positivos y • es la operación de multiplicación sobre los reales positivos.

Verificando la definición de grupo tenemos que:

- La multiplicación es una operación asociativa y conmutativa, por lo que se cumple con la primera condición
- En el conjunto R+, el número real positivo 1 sirve de identidad x • 1 = 1 • x = x, por lo que se cumple con la segunda condición
- En el conjunto R+, todo x en R+ tiene inverso $\frac{1}{x}$ en el conjunto R+, porque $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ y de esta forma se cumple con la tercera condición

Por lo tanto, (R+, •) es un grupo conmutativo.

142

PRODUCTOS Y COCIENTES DE LOS GRUPOS

143

Producto de los grupos

Dados dos grupos H y K se define el producto como el conjunto

H x K = {(h, k) | h ∈ H, k ∈ K}

dotado de la operación

$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2)$

144

Cociente de los grupos

Antes de definir el cociente de los grupos debemos revisar la definición de los subgrupos normales.

Subgrupo normal

Dado un subgrupo H de un grupo G, se dice que H es normal en G si gH = Hg para todo g ∈ G. En otras palabras, cuando coinciden las clases laterales izquierdas y derechas.

Grupo cociente

Se denomina grupo cociente de G por N al grupo de las clases laterales del subgrupo normal N de un grupo G que forman un grupo G/N con la operación (aN)(bN) = abN.

145

CODIFICACIÓN DE INFORMACIÓN BINARIA Y DETECCIÓN DE ERRORES

146

Codificación de información binaria y detección de errores

- Para transmitir la información es necesario codificarla. La forma más usual es utilizar la información binaria, por medio de la cual se envían los mensajes o cadenas de palabras.
- Durante la transmisión o el almacenamiento los datos pueden corromperse debido a distintos fenómenos no deseados, algunos de ellos pueden ser subidas de tensión, ruido eléctrico, puntos defectuosos en los discos o cintas, entre otros. Es por esta razón que es muy útil poder detectar y hasta corregir los errores en los datos.
- Podemos encontrar distintas formas de errores tales como la eliminación de un bit o la adición de un bit, la inversión de un bit de 0 a 1 o viceversa. También, se pueden afectar varios bits sucesivos, a lo que se le llama errores de ráfaga.

147

ESTRATEGIAS PARA TRATAR LOS ERRORES

148

Códigos detectores de errores

En esta estrategia se incluye una cantidad de bits redundantes en los datos que se transmiten. De esta forma, el receptor puede detectar que se ha producido un error y solicitar la retransmisión del mensaje.

Podemos detectar errores utilizando un código de paridad simple, sin embargo debemos tener en cuenta que este sólo puede detectar errores de números impares.

149

Códigos correctores de errores

Al igual que en la estrategia anterior, se incluye información redundante de forma tal que le permita receptor deducir cual fue el carácter que se transmitió. De esta forma, el receptor puede corregir un número limitado de errores.

150

Antes de explicar la forma en la que pueden manejarse los errores veamos cómo se codifican los datos debido a que una palabra de datos de longitud m bits es transformada en palabras codificadas de n bits antes de transmitirse.

Empecemos por definir una unidad de datos, que en este contexto se le denomina trama. La trama consiste en m bits de datos y r bits redundantes los cuales son usados para la verificación. La longitud total de una trama n es igual a n = m + r. Se conoce como *palabra codificada* a la unidad de n bits que contiene datos y bits de redundancia.

151

151

Distancia Hamming

- Definimos la distancia Hamming entre dos palabras codificadas de n bits v1 y v2, como el número de bits en el que difieren v1 y v2. La distancia Hamming se denota como d(v1, v2).

152

152

Ejemplo

Encuentre la distancia Hamming de las palabras codificadas de n bits v1 = 10001001 y v2 = 10110001

Verificando el número de bits en el que difieren v1 y v2 tenemos

v1 = 10001001

v2 = 10110001

Por lo tanto, d(v1, v2) = 3

153

Distancia Hamming mínima

A la distancia Hamming más pequeña entre todos los posibles pares de palabras codificadas de un esquema de codificación se le denomina distancia Hamming mínima y se denota como dmin. El valor corresponde a la distancia Hamming más pequeña entre todas las encontradas en las palabras codificadas del esquema.

En la detección de errores se utiliza la codificación en bloques. En la codificación en bloques la misma palabra de datos es transformada siempre en la misma palabra codificada. A este proceso de codificación en bloques se le denomina de uno a uno. Se denominan palabras válidas a las palabras codificadas a partir de una palabra de datos. Se tendrá $2^n - 2^m$ palabras codificadas que no serán utilizadas, a estas se les denomina inválidas.

En este enfoque a partir de palabras de datos el emisor crea las palabras codificadas para ello se utiliza un generador el cual se encarga de aplicar las reglas y procedimientos de codificación específicos de acuerdo con el esquema empleado.

Debemos estar claros que cada palabra codificada puede variar durante su transmisión. Si al recibirla el receptor, la misma no es válida, entonces será descartada. Por el contrario, si al ser modificada resulta codificada como válida, entonces el error no será detectado.

154

DECODIFICACIÓN Y CORRECCIÓN DE ERRORES

155

Existen dos formas en las que se pueden tratar la corrección de errores:

- Cuando en un fragmento de datos se detecta el error entonces el receptor solicita la retransmisión al emisor de dicho fragmento de datos.
- Cuando se está utilizando suficiente información redundante que le permite al receptor detectar el error y aplicar el método corrector para corregir dicho error.

Basados en la explicación de la codificación en bloques de la sección anterior podemos indicar que, para detectar un error en la palabra codificada, el receptor sólo necesita saber si la misma es inválida. Luego de recibir una palabra inválida se realiza el cálculo de la distancia Hamming entre la palabra recibida y las palabras válidas para encontrar la distancia menor la cual nos indicará la palabra codificada válida que originalmente transmitió el emisor.

El error no podrá ser corregido y la palabra recibida se descartará si al realizar el cálculo de la distancia Hamming mínima, dos o más palabras válidas tienen un mismo valor.

156

Propiedades de la distancia Hamming

- d(a, b) = d(b, a)
- d(a, b) = 0 si y sólo si a = b
- d(a, b) + d(b, c) ≥ d(a, c)

donde, *d* es el número de bits *p* que son diferentes entre el mensaje emitido y el recibido.

Con esta información tenemos que

- Se puede detectar un error de peso p, si d ≥ p + 1
- Se puede corregir p dígitos, si d ≥ 2p + 1

157

Ejemplo

Calcule la distancia miníma de Hamming d si queremos

a) detectar 4 errores

b) corregir 4 errores

a) para detectar 4 errores, p = 4

d = p + 1

d = 4 + 1

d = 5

la distancia mínima de Hamming debe ser de 5

b) corregir 4 errores, p = 4

d = 2p + 1

d = 2 (4) + 1

d = 9

la distancia mínima de Hamming debe ser de 9

158